DMA Přednáška – Relace

Definice.

Nechť A, B jsou množiny. Libovolná podmnožina $R \subseteq A \times B$ se nazývá **relace** z A do B.

Jestliže $(a, b) \in R$, pak to značíme aRb a řekneme, že a **je v relaci k** b vzhledem k R.

Definice.

Nechť A je množina. Řekneme, že R je relace na A, jestliže je to relace z A do A.

Příklad: Uvažujme malou školu se studenty **F**rodo, **M**erry, **P**ippin a **S**am, škola nabízí kursy **c**estování, **d**iskrétní matiky, **e**lfštiny a **f**rodologie.

Frodo si zapsal cestování a elfštinu, Merry a Pippin si zapsali cestování a diskrétku, Sam si zapsal elfštinu a frodologii.

Definice.

Nechť $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ a $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ jsou množiny. Pro relaci R z A do B definujeme **matici relace** $M_R = (m_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ předpisem

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R; \\ 0, & (a_i, b_j) \notin R. \end{cases}$$

Příklad: Nechť je A množina všech měst (v České republice, aby jich nebylo tolik). Nechť R_1 je relace na A definovaná tak, že aR_1b právě tehdy, jestli se dá z a do b dostat autobusem, a R_2 je relace na A definovaná tak, že aR_2b právě tehdy, jestli se dá z a do b dostat vlakem.

Definice.

Nechť R je relace z nějaké množiny A do nějaké množiny B. Definujeme **relaci inverzní k** R, značeno R^{-1}, jako relaci z B do A předpisem

$$R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}.$$

Tedy

$$bR^{-1}a \text{ právě tehdy, když } aRb.$$

Definice.
Nechť R je relace z nějaké množiny A do nějaké množiny B a S je relace z B do nějaké množiny C. Definujeme jejich **složení** $S \circ R$ jako relaci z A do C definovanou

$$S \circ R = \big\{(a,c) \in A \times C : \exists b \in B \colon\ [(a,b) \in R \wedge (b,c) \in S]\big\}.$$

Příklad: Připomeňme, že $A = \{F, M, P, S\}$ jsou studenti, $B = \{b, c, d, e\}$ kursy a relace
$R = \{(F,c),(F,e),(M,c),(M,d),(P,c),(P,d),(S,e),(S,f)\}$ říká, který student si zapsal jaký kurs.
Množina učitelů $C = \{\mathcal{E}$lrond, $\mathcal{G}$andalf, $\mathcal{T}$om Bombadil$\}$,
relace který kurs je učen kterým učitelem: $S = \{(c,\mathcal{G}),(d,\mathcal{T}),(e,\mathcal{E}),(f,\mathcal{G})\}$.

Fakt.
Nechť R je relace z nějaké množiny A do nějaké množiny B, S je relace z B do nějaké množiny C a T je relace z C do nějaké množiny D. Pak $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$.

Definice.
Nechť R je relace na nějaké množině A. Pak definujeme její **mocninu** rekurzivně jako
(0) $R^1 = R$;
(1) $R^{n+1} = R \circ R^n$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Definice.
Nechť R je relace na množině A.
Řekneme, že R je **reflexivní**, jestliže pro všechna $a \in A$ platí aRa.
Řekneme, že R je **symetrická**, jestliže pro všechna $a, b \in A$ platí $aRb \implies bRa$.
Řekneme, že R je **antisymetrická**, jestliže pro všechna $a, b \in A$ platí $(aRb \wedge bRa) \implies a = b$.
Řekneme, že R je **tranzitivní**, jestliže pro všechna $a, b, c \in A$ platí $(aRb \wedge bRc) \implies aRc$.