DMA Domácí koronaúkol č. 4a

Tento úkol vypracujte a pak si v pátek zkontrolujte oproti vyvěšenému řešení.

1.
a) Vyřešte lineární kongruenci $35x \equiv 14 \pmod{77}$.
b) Vyřešte rovnici $35x = 14$ v $\mathbb{Z}_{77}$.

2. Vyřešte soustavu $x \equiv 3 \pmod 5$, $x \equiv 4 \pmod 4$ a $x \equiv 5 \pmod 3$.

Řešení:

1. Převod na diofantickou rovnici: $35x + 77y = 14$.
Tabulka dá $7 = 1 \cdot 77 + (-2) \cdot 35$. Vynásobíme dvěma, $14 = 2 \cdot 77 + (-4) \cdot 35$.
Proto $x_p = -4$.
Homogenní rovnice po zkrácení sedmičkou: $5x + 11y = 0$.
Máme $x_h = 11k$. Nebo to vykoukáme z tabulky.
Závěr:
a) Obecné řešení je $x = -4 + 11k$ pro $k \in \mathbb{Z}$.
b) Řeení je x=$7, 18, 29, 40, 51, 62, 73$.

a/b	y	x
77	1	0
35	0	1
7•	1•	−2•
0	−5	11

2. Nejprve $x_h = 5 \cdot 4 \cdot 3k = 60k$.
Rovnice si zjednodušíme:

$$\begin{array}{lc|c|c}
 & \underline{x \equiv 3 \pmod 5} & \underline{x \equiv 0 \pmod 4} & \underline{x \equiv 2 \pmod 3} \\
 & 4 \cdot 3 \cdot x_1 \cdot 3 & 5 \cdot 3 \cdot x_2 \cdot 0 & 5 \cdot 4 \cdot x_3 \cdot 2 \\
 & 12x_1 \equiv 1 \pmod 5 & & 20x_3 \equiv 1 \pmod 3 \\
 & 2x_1 \equiv 1 \pmod 5 & & -x_3 \equiv 1 \pmod 3 \\
 & x_1 = -2 & & x_3 = -1 \\
x_p = & 3 \cdot 12 \cdot (-2) & +0 & +2 \cdot 20 \cdot (-1) \quad = -112
\end{array}$$

Množina všech řešení je tedy $x = 60k - 112$ pro $k \in \mathbb{Z}$ neboli $x = 8 + 60k$ pro $k \in \mathbb{Z}$. Kdyby se vzalo $x_3 = 2$, dostaneme $x = -72 + 80 = 8$ rovnou.
Diskuse: V prvním sloupci stačilo díky příhodné pravé straně pracovat se členem $4 \cdot x_1 \cdot 3$, kde $4x_1 \equiv 1 \pmod 5$. Podobně u třetího členu, kde potřebujeme nulovost modulo 4 a dvojku už máme, stačí dodat další, tedy tvar $5 \cdot 2x_3 \cdot 2$.