DMA Domácí koronaúkol č. 5b

Tento úkol vypracujte a pak své řešení ukažte v rámci cvičení na MS Teams.

Pro následující relace $\mathcal{R}$ na $\mathbb{R}$ vyšetřete, zda splňují základní čtyři vlastnosti (reflexivita, symetrie, antisymetrie, tranzitivita).
Poznámka: Vyšetřit znamená rozhodnout zda platí či neplatí a odpověď dokázat.

1. $x\mathcal{R}y$ právě tehdy, když $y = x + 1$.

2. $x\mathcal{R}y$ právě tehdy, když $x + y$ je sudé.

Řešení:
1.
Reflex: neplatí. Pp: $x = 13$, neplatí $13 = 13 + 1$ a tedy ani $x\mathcal{R}x$.

Sym: neplatí. Pp: Platí $13\mathcal{R}14$ (neboť $14 = 13 + 1$), ale neplatí $14\mathcal{R}13$ (neboť $13 \neq 14 + 1$).
Poznámka: To v těch závorkách je u takto zjevné věci asi možno i vynechat, ale pro jistotu jsem to napsal, abych si šplhnul u zkoušejícího.

Antisym: platí. Intuitivně je to jasné, tato relace posouvá čísla o jedno doprava na reálné ose, čili není možné, aby mezi dvěma čísly vedla šipka tam i zpět.
Další indikátor je, že když člověk zkouší najít protipříklad, tak ne a ne najít dvě čísla, která by splnila předpoklad.
Formální důkaz je trochu tricky.
Vezměme libovolné $x, y \in \mathbb{R}$. Chceme vyjít z předpokladu $x\mathcal{R}y$ a $y\mathcal{R}x$. To ovšem znamená, že $y = x+1$ a $x = y + 1$. Po dosazení z jedné do druhé dostáváme $0 = 2$, což nejde. Co to ale znamená? Nesmysl vzniknul kombinací dvou rovnic z předpokladu, čli je to ten předpoklad, který neplatí, ne celá vlastnost. Jestli předpoklad nikdy neplatí, tak celá implikace vždy platí a to je vlastně důkaz platnosti antisymetrie. Mimochodem ukázali jsme, že předpoklad není nikdy splněn, což vysvětluje, proč nešlo najít protipříklad.
Poznámka: a) Všimněte si důležitého rozdílu. Nám nestačí ukázat nějaký protipříklad na platnost předpokladu. My totiž chceme ukázat, že vlastnost (implikace) platí **vždycky**, tudíž je třeba ukázat, že předpoklad je **vždycky** neplatný.
b) Neplatnost předpokladu není možné uděat tak, že se odvoláme na neplatnost symetrie, a to ze dvou důvodů. Formálně: symetrie je jiná, má v sobě implikaci, zatímco antisymetrie má v předpokladu konjunkci. Druhý důvod je v kvantifikátoru. I kdyby byla symetrie taky s konjunkcí, tak my jsme vyvrátili platnost symetrie, a na to stačí ukázat, že selže někdy, zatímco zde potřebujeme ukázat, že předpoklad selže vždy. Samozřejmě cítíme, že při zkoumání symetrie jsme se dozvěděli ledacos od tom předpokladu, ale nelze to přímočaře spojit.

Tranz: nepla. Pp: $13\mathcal{R}14$ a $14\mathcal{R}15$, ale neplatí $13\mathcal{R}15$ neboť $15 \neq 13 + 1$.
Tou poslední vysvětlivkou naznačuji zkoušejícímu, že vím, co a jak se má testovat.
Taky by to šlo napsat třeba takto: Pp: $x = 13$, $y = 14$, $z = 15$, pak $14 = 13 + 1$ a $15 = 14 + 1$, ale $15 \neq 13 + 1$. Nebo to nějak jinak nakombinovat.

2. Tento příklad má těžší tranzitivitu a hlavně je to chyták.
Reflex: Nejčastěji jsem viděl něco takového: $x \in \mathbb{R}$ lib. $2x$ je vždy sudé, tedy $x + x$ je vždy sudé, tedy $x\mathcal{R}x$.
Komentář 1: Správný důkaz jde od známého (či předpokladu) k žádanému, přesně jak to vidíme výše. Jiné struktury, třeba „$x\mathcal{R}x$ proto $2x$ sudé“, nejsou dobře.
Komentář 2: Když se snažíme osahat si nějakou situaci, tak obvykle zkoušíme pěkná čísla. Ne vždy je to dobrá strategie, člověk si zvykne a pak si neuvědomí, že reálná čísla obsahují i jiné entity než pěkná celá čísla. Jakmile nás to napadne, pak tvrzení, že $2x$ je vždy sudé, najednou přestane vypadat jako dobrý nápad.
Správné řešení: $\mathcal{R}$ není reflexivní. Důkaz protipříkladem: $x = \frac{1}{2}$ nesplňuje $x\mathcal{R}x$.
Komentář: Je zajímavé, že platnost reflexivity záleží na tom, na jakém světě tuto relaci používáme. Na $\mathbb{Z}$ platí (a pak je ten text výše správný důkaz), na $\mathbb{R}$ neplatí. Souvisí to s tím, že reflexivita je globální vlastnost, chce mít smyčky všude. Pokud relace žije na reálných číslech a my ukážeme, že $x\mathcal{R}x$ platí na

celých číslech, tak to nic neznamená, jen to, že jsme reflexivitu **zatím** nedokázali pokazit. Je třeba se podívat i jinde.

Sym: pla. Nechť $x, y \in \mathbb{R}$ libovolné. Předpoklad: $x\mathcal{R}y$. Pak je $x + y$ sudé, a protože $y + x = x + y$, je i $y + x$ sudé. Proto $y\mathcal{R}x$.
Poznámka: Struktura tohoto důkazu odpovídá tomu, co jsme dříve trénovali. Chceme dokázat jistou implikaci, proto je tam předpoklad, a také je tam správný úvod a závěr.
Poznámka: Tento důkaz platí na $\mathbb{Z}$ i na $\mathbb{R}$. Podstatné je, aby $x + y$ bylo celé číslo (a sudé), a to zařídí ten předpoklad $x\mathcal{R}y$, který dál pustí třeba dvojici $(1.3, 0.7)$, ale nepustí dvojici $(1.3, 2.3)$.
To mě přivádí k jedné zajímavé chybě. Pečlivější studenti občas napíšou
• Pro každé $a, b \in \mathbb{R}$: předpoklad $a\mathcal{R}b$, pak ...
Někdy to ovšem dopadne takto:
• Předpoklad: pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ platí $a\mathcal{R}b$, pak ...
Tyto se velmi liší. V první verzi si vlastně nejdříve vezmeme konkrétní dvojici a, b, pro ni pak předpoklad zafunguje jako filtr a občas nás pustí v důkazu dál. V druhé verzi se díváme, jestli $a\mathcal{R}b$ platí pro všechna a, b, což v našem případě určitě není pravda, tedy filtr nás v důkazu dál nepustí. Je to vidět i jinak. Ta první verze dokazuje tvrzení
$\forall a, b \in A$: $[a\mathcal{R}b \implies b\mathcal{R}a]$.
Ta druhá dokazuje tvrzení: $[\forall a, b \in A\colon a\mathcal{R}b] \implies$? Není jasné, co má být jako závěr, protože nemáme k dispozici ta a, b, platnost prokaždítka je omezena závorkou.

Antisym: nepla. Pp: Máme $3\mathcal{R}13$ a $13\mathcal{R}3$, ale neplatí $3 = 13$.

Tranz: Tato vlastnost platí na $\mathbb{Z}$ a neplatí na $\mathbb{R}$.
Nejprve ukážeme důkazy platnosti, které jsou náročnější, ale pořád ještě dosažitelné. Všechny začínají stejnou omáčkou:
Mějme $x, y, z \in \mathbb{Z}$ splňující $x\mathcal{R}y$ a $y\mathcal{R}z$.
Verze 1: Pak $x + y = 2k$ a $y + z = 2l$ pro $k, l \in \mathbb{Z}$. Chceme se zbavit y, odečteme: $x - z = 2k - 2l$. My ale potřebujeme $x + z$, proto přičtu k oběma stranám $2z$: $x + z = 2(k - l + z)$ a $k - l + z \in \mathbb{Z}$, tedy $x + z$ je sudé a $x\mathcal{R}z$.
Verze 2: Pak $x + y = 2k$ a $y + z = 2l$ pro $k, l \in \mathbb{Z}$. Odtud $x + 2y + z = 2k + 2l$, tedy $x + z = 2(k + l - y)$ a $k + l - y \in \mathbb{Z}$, tedy $x + z$ je sudé a $x\mathcal{R}z$.
Verze 3: Aby bylo $x + y$ sudé, musí mít x, y stejnou paritu (obě sudé či obě liché). Podle sudosti $y + z$ musí mít i y, z stejnou paritu. Protože se y vyskytuje v obou tvrzeních, musí mít x, y, z stejnou paritu. Takže x, z mají stejnou paritu, $x + z$ je sudé a $x\mathcal{R}z$.

Ve světě $\mathbb{R}$ tyto důkazy neplatí. U třetí verze je to jasné, kromě možností x sudé a x liché je ještě možnost x necelé a ta to zbourá.
U prvních dvou verzí se neplatnost ve světě $\mathbb{R}$ skrývá v tom, co mnozí považují za zbytečnou formalitu, tedy v poznámce, že $(k - l + z) \in \mathbb{Z}$, popřípadě $(k + l - y) \in \mathbb{Z}$. Je jasné, že pokud zkusíme vzít necelá čísla, pak toto ztroskotá, což ukazuje cestu k protipříkladu:
Důkaz neplatnosti: pp: $x = 0.5$, $y = 1.5$, $z = 2.5$, pak $x\mathcal{R}y$ a $y\mathcal{R}z$, ale neplatí $x\mathcal{R}z$ $(0.5 + 2.5 = 3$ není sudé).