DMA Domácí koronaúkol č. 5c (příprava)

Toto jsou příklady vhodné obtížnosti pro semestrální písemku. Nejprve vždy příklad vyřešte samostatně a snažte se o pěkný zápis důkazů, pak se podívejte na další strany na řešení.

Pro následující relace $\mathcal{R}$ vyšetřete, zda splňují základní čtyři vlastnosti
(reflexivita, symetrie, antisymetrie, tranzitivita).
Poznámka: Vyšetřit znamená rozhodnout zda platí či neplatí a odpověď dokázat.

1. $\mathcal{R}$ na $\mathbb{Z}$; $a\mathcal{R}b$ právě tehdy, když $a^2 \leq b^2$.

2. $\mathcal{R}$ na $\mathbb{R}$; $a\mathcal{R}b$ právě tehdy, když $|a - b| = 2$.

3. $\mathcal{R}$ na $\mathbb{Z}$; $a\mathcal{R}b$ právě tehdy, když $a \cdot b \geq 0$.
No dobrá, u trojky je jedna vlastnost trochu triková, ale jinak je to standard.

Řešení jsou na dalších stranách.

Řešení:

1.

Reflex: platí. Dk: $a \in \mathbb{Z}$ lib. Víme, že $a^2 = a^2$, proto $a^2 \leq a^2$ a tedy $\underline{a\mathcal{R}a}$.
Poznámky: a) Každý důkaz musí vést od známého k tomu, co chceme dokázat. Nelze napsat něco jako: $a\mathcal{R}a$ proto $a^2 \leq a^2$.
b) Každý důkaz někde začne. Obvykle začínáme předpokladem, ale to platí jen pro důkazy implikace. Implikaci vidíme u symetrie, antisymetrie a tranzitivity, ale ne u reflexivity. Kde tedy začneme u ní? Něčím, co je známo, nějakým obecně platným faktem.

Sym: neplatí. Pp: Platí $13\mathcal{R}14$ (neboť $13^2 \leq 14^2$), ale neplatí $14\mathcal{R}13$ (neboť neplatí $14^2 \leq 13^2$).
Poznámky: a) To v těch závorkách je u takto zjevné věci asi možno i vynechat, ale pro jistotu jsem to napsal, abych si šplhnul u zkoušejícího.
b) Protipříklad musí splnit předpoklad, ale nesplnit závěr. Takže třeba dvojice $a = 3$, $b = 2$ není protipříkladem proti symetrii, protože nesplňuje předpoklad.
c) Protipříklad jsou ty objekty (zde čísla), která zlobí. Proto je potřeba psát protipříklady tak, aby bylo jasné, která to jsou. Když vidím na začátku to $13\mathcal{R}14$, tak vím, že jsou to čísla 13 a 14. Je také možné napsat „pp: $a = 13$, $b = 14$“ a přidat nějaký komentář. Není vhodné napsat jen
„pp: platí $13^2 \leq 14^2$), ale neplatí neplatí $14^2 \leq 13^2$“
protože tím nutíme čtenáře, aby si rozšifroval, co to vlastně je ten náš protipříklad.

Antisym: neplatí. Když to necítíme intuitivně, zkusíme napsat důkaz a uvidí se.
Takže vezmeme $a, b \in \mathbb{Z}$ splňující $a\mathcal{R}b$ a $b\mathcal{R}a$. Pak $a^2 \leq b^2$ a $b \leq a^2$. Odtud $a^2 = b^2$. Umíme z toho odvodit, že $a = b$? Asi ne, protože ve hře jsou i záporná čásla, to nás inspiruje k vytvoření protipříkladu.
Závěr: Antisym neplatí. Pp: $a = 13$, $b = -13$. Pak $a\mathcal{R}b$ a $b\mathcal{R}a$ (tedy splněn předpoklad), ale $a \neq b$ (neplatí závěr).
Poznámka: Je vidět, že pokud bychom tuto relaci uvažovali třeba na $\mathbb{N}$, tak už by antisymetrie platila. Důkaz by pak vypadal takto:
$a, b \in \mathbb{N}$. Předp. $a\mathcal{R}b$ a $b\mathcal{R}a$. Pak $a^2 \leq b^2$ a $b \leq a^2$. Odtud $a^2 = b^2$ neboli $|a| = |b|$. Protože $a, b \geq 0$, znamená to $a = b$.
Všimněte si, ak se zase držíme formátu pro důkaz implikace (z jejího předpokladu nějakými skoky dojdeme k jejímu závěru).

Tranz: platí. Dk: $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Předp.: $\underline{a\mathcal{R}b}$ a $\underline{b\mathcal{R}c}$. Pak $a^2 \leq b^2$ a $b^2 \leq c^2$. Odtud $a^2 \leq c^2$ a tedy $\underline{a\mathcal{R}c}$.
Poznámka: Eliminace b z daných rovnic je tradiční postup.
Opět si všimněte tradiční formy důkazu implikace: Začneme předpokladem, trocha hraní a skončíme závěrem. Začátek i konec jsou v řeči relace, nezačali jsme rovnou skokem do $a^2 \leq b^2$ a podobně.

2. Tato relace nám umožňuje skákat po reálné ose skoky o velikosti 2.
Reflex: neplatí. Pp: Zvolíme $a = 7$ (překvapení!). Pak $|a - a| = 0 \neq 2$, tedy neplatí $a\mathcal{R}a$.
Poznámka: Nejsem si jist, zda by stačilo napsat

Pp: Neplatí $7\mathcal{R}7$.

Asi ano, ale u zkoušky bych pro jistotu napsal víc.
Poznámka: Nestačí napsat, že „reflexivita neplatí, protože $|a - a| \neq 2$“. Vždy je nutno ukázat konkrétní protipříklad. Tím se dokáže, že skutečně existuje případ, kdy dojde k selhání.
Proč je to důležité? Představme si relaci danou $x\mathcal{S}y$ pokud $x = y^2$. Platí reflexivita? To by muselo platit, že $x = x^2$, zjevný nesmysl. Pokud bychom teď zajásali, že je reflexivita špatně, tak je to předčasné, já jsem totiž tuto relaci vtipně definoval na množině $A = \{-1, 1, \infty\}$. Tak, a teď hledejte protipříklad.

Sym: platí. Dk: $a, b \in \mathbb{R}$. Předpoklad: $\underline{a\mathcal{R}b}$, odtud $|a - b| = 2$. Pak také

$$|b - a| = |-(a - b)| = |a - b| = 2,$$

tedy $\underline{b\mathcal{R}a}$.
Poznámka: Umím si představit, že rovnost $|a - b| = |b - a|$ by studenti uměli odůvodnit i jinak.
Poznámka: Pokud napíšeme, že „Symetrie platí, protože $|b - a| = |a - b|$“, tak je to vlastně pravda, protože jsme tím vystihli klíčový krok, a v nějakém pojednání by to stačilo, ať si to čtenář doplní sám. Ale zde trénujeme psaní důkazů, takže to chceme mít pěkně, ať je vidět úplný důkaz implikace.

Antisym: neplatí. Když to necítíme intuitivně, zkusíme napsat důkaz a uvidí se.
Takže vezmeme $a, b \in \mathbb{R}$ splňující $a\mathcal{R}b$ a $b\mathcal{R}a$. Pak $|a-b| = 2$ a $|b-a| = 2$. To je vlastně dvakrát zopakovaná stejná informace, že $|a-b| = 2$, z toho rovnost nevymlátíme.
Závěr: Antisym neplatí. Pp: $a = 12$, $b = 14$. Pak $a\mathcal{R}b$ a $b\mathcal{R}a$, ale $a \neq b$.

Tranz: neplatí. Pp: Zvolíme $a = 1$, $b = 3$, $c = 5$. Pak $1\mathcal{R}3$ a $1\mathcal{R}5$, ale neplatí $1\mathcal{R}5$.
Poznámka: Je dobré si uvědomit, že je také možné vzít jako protipříklad $a = 1$, $b = 3$, $c = 1$.

3.
Reflex: platí. Dk: Všechna $a \in \mathbb{Z}$ splňují $a^2 \geq 0$ neboli $a \cdot a \geq 0$, proto $\underline{a\mathcal{R}a}$.

Sym: platí. Dk: $a, b \in \mathbb{Z}$. Předpoklad: $\underline{a\mathcal{R}b}$, odtud $a \cdot b \geq 0$. Díky komutativitě také $b \cdot a \geq 0$ a tedy $\underline{b\mathcal{R}a}$.

Antisym: neplatí. Když to necítíme intuitivně, zkusíme napsat důkaz a uvidí se.
Takže vezmeme $a, b \in \mathbb{Z}$ splňující $a\mathcal{R}b$ a $b\mathcal{R}a$. Pak $ab \geq 0$ a $ba \geq 0$. To je dvakrát zopakovaná informace, že $ab \geq 0$, z toho asi $a = b$ neodvodíme.
Závěr: Antisym neplatí. Pp: $a = 1$, $b = 3$. Pak $a\mathcal{R}b$ a $b\mathcal{R}a$, ale $a \neq b$.

Tranz: Tohle je ta lepší otázka. Aby tranzitivita platila, museli bychom být schopni z informace, že $ab \geq 0$ a $bc \geq 0$, nějak dostat, že $ac \geq 0$.
Člověka může napadnout, že $ab \geq 0$ typicky znamená, že obě čísla jsou kladná nebo obě záporná.
Verze obě kladná: $a, b > 0$, pak z $bc \geq 0$ máme i c kladné, proto je $ac \geq 0$.
Verze obě záporné: $a, b < 0$, pak z $bc \geq 0$ máme i c záporné, proto je $ac \geq 0$.
To vypadá nadějně, dokud člověka nenapadne (doufejme), že je i nula. Pak už není tak těžké najít protipříklad.
Závěr: Tranzitivita neplatí. Pp: $a = 13$, $b = 0$, $c = -13$. Pak $13\mathcal{R}0$ a $0\mathcal{R}(-13)$, ale neplatí $13\mathcal{R}(-13)$.

Alternativa: U relací daných vzorcem obvykle zkoušíme tranzitivitu dokázat eliminací „prostředníka“ algebrou. Zde máme nerovnosti, tedy není možné si z první vyjádřit b a dosadit do druhé. Můžeme ale nerovnice navzájem vydělit:

$$\frac{ab}{bc} \geq 0 \implies \frac{a}{c} \geq 0 \implies \frac{ac}{c^2} \geq 0 \implies ac \geq 0.$$

To vypadá slibně, ovšem (vždy ve střehu!) hned v prvním zlomku vidíme, že to funguje pouze pro $bc \neq 0$, což by nás mělo navést na správnou cestu k protipříkladu.
Alternativa: Označíme si $x = ab$, pak víme, že $x \geq 0$. Odtud $b = \frac{x}{a}$, dosadíme do druhé rovnice, máme $\frac{x}{a}c \geq 0$ neboli $\frac{x}{a^2} \cdot ac \geq 0$. Protože $x \geq 0$ a $a^2 \geq 0$, odvodíme, že $ac \geq 0$. I zde je ovšem problém s nulami.