

DMA Domáci koronaúkol č. 6a

Tento úkol vypracujte a pak si v pátek zkontrolujte oproti vyvěšenému řešení.

1. Uvažujte následující relace na \mathbb{N} :

$a\mathcal{R}b$ právě tehdy, když $a < b$;

$a\mathcal{S}b$ právě tehdy, když a dělí b a $a \neq b$.

Rozhodněte, zda složená relace $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ (pozor, nejprve \mathcal{R} , pak \mathcal{S}) obsahuje dvojici $(3, 20)$ a dvojici $(3, 7)$. Odpovědi zdůvodněte.

2. Uvažujte množinu A uspořádaných trojic (r, t, s) , kde

r je přirozené číslo $1, 2, \dots, 9$ (ročník);

t je velké písmeno A, B, C, \dots (třída);

s je řetězec písmen (příjmení studenta).

V první souřadnici řadíme dle velikosti čísla, v druhé a třetí souřadnici řadíme dle abecedy. Podle teorie je lexikografické uspořádání lineární, a množinu A je tedy možné seřadit do jednoho řetízku.

Ukažte toto seřazení (tedy vlastně Hasseův diagram), pokud se množina A skládá z těchto trojic:

$(5, A, Alda)$, $(7, B, Cody)$, $(6, C, Ego)$, $(5, B, Fink)$, $(7, A, Job)$, $(5, A, Klen)$, $(7, B, Mold)$, $(5, A, Nub)$.

Řešení:

1. Aby byla nějaká dvojice (x, z) v relaci $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, tak se musí najít číslo y takové, že $x\mathcal{R}y$ a $y\mathcal{S}z$ (neboli zkráceně $x\mathcal{R}y\mathcal{S}z$). Co to znamená? Musí být splněno $x < y$ a y dělí z a $y \neq z$.

$(3, 20)$: Hledáme y splňující $3 < y$, y dělí 20 a $y \neq 20$. Vyhovují $y = 4$, $y = 5$ a $y = 10$, ale stačilo by i jedno. Víme tedy, že $(3, 20) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

Symbolicky: Pokud použiji $y = 5$, tak mám řetězec $3 \xrightarrow{\mathcal{R}} 5 \xrightarrow{\mathcal{S}} 20$, proto $3 \xrightarrow{\mathcal{S} \circ \mathcal{R}} 20$.

$(3, 7)$: Hledáme y splňující $3 < y$, y dělí 7 a $y \neq 7$. Pak musí být $4 \leq y \leq 6$ a mezi těmito čísly žádné nedělí 7 . Proto neexistuje y , jaké potřebujeme, a $(3, 7) \notin \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

2. Princip lexikografického uspořádání: Porovnáváme dvě trojice. Pokud první souřadnice rozhodne, máme hotovo. Pokud je v první souřadnici remíza a rozhodne druhá, máme hotovo. Pokud je na prvních dvou souřadnicích remíza, rozhodne třetí.

$(5, A, Alda) \prec (5, A, Klen) \prec (5, A, Nub) \prec (5, B, Fink) \prec (6, C, Ego) \prec (7, A, Job) \prec (7, B, Cody) \prec (7, B, Mold)$.