DMA Domácí koronaúkol č. 6b

Tento úkol vypracujte a pak své řešení ukažte v rámci cvičení na MS Teams.

1. Uvažujte následující relaci na $\mathbb{Z}$:
$a\mathcal{R}b$ právě tehdy, když $b-a$ je dělitelné dvěma či třemi.
Vyšetřete, zda splňuje základní čtyři vlastnosti (reflexivita, symetrie, antisymetrie, tranzitivita).
Je to částečné uspořádání?

2. Nakreslete Hasseův diagram pro množinu $A = \{2, 4, 6, 12, 24, 36\}$ uspořádanou relací dělitelnosti, tedy aRb jestliže a dělí b.
Najděte její maximum, minimum, největší a nejmenší prvek, pokud existují.
Najděte nějaké lineární rozšíření této uspořádané množiny.

Řešení:

1. Významným vlivem na to, co přijde, je logická disjunkce (nebotítko) v definici. Obvykle působí komplikace tím, že vlastně nevíme přesně, co se děje, a musíme pokrývat možnosti.
Reflexivita: Rozbor: Chceme čtenáře přesvědčit, že $a\mathcal{R}a$ tedy že $2 \mid (a-a)$ nebo $3 \mid (a-a)$. To vypadá dost jasně, a zde dokonce disjunkce pomáhá, protože na to, abychom ji splnili, stačí potvrdit jednu ze dvou vlastností. Já si vyberu číslo bližší třináctce.
Při psaní důkazu si musíme dát pozor, aby vedl od něčeho známého (není tu předpoklad) k tomu, co chceme.
Závěr: Platí. Dk: Libovolné $a \in \mathbb{Z}$. Platí: $a - a = 0$ je dělitelné trojkou. Proto $a\mathcal{R}a$.

Symetrie: Platí. Dk: Nechť $a, b \in \mathbb{Z}$ splňují $a\mathcal{R}b$. Pak jsou dvě možnosti.
1. 2 dělí $b-a$. Pak ovšem také 2 dělí $-(b-a) = a-b$ a tedy $b\mathcal{R}a$.
2. 3 dělí $b-a$. Pak ovšem také 3 dělí $-(b-a) = a-b$ a tedy $b\mathcal{R}a$.

Každopádně $b\mathcal{R}a$ a důkaz je hotov.
Poznámka: Na rozdíl od reflexitivy si teď variantu nevybíráme my, ale ta dvě čísla z našeho předpokladu. Proto je musíme obě pokrýt.
Kdybych psal tužkou, nakreslím od $a\mathcal{R}b$ dvě šipky dolů a šikmo, kterým proud důkazu rozdvojím, a případy 2, 3 bych dělal paralelně ve dvou sloupečcích, abych je nakonec zase spojil do závěru $b\mathcal{R}a$.

Antisymetrie: Neplatí. Dk: Uvažujme $a = 13$, $b = 23$. Pak $b - a = 10$ je dělitelné dvěma, stejně jako $a - b = -10$, tedy $a\mathcal{R}b$ a $b\mathcal{R}a$, ale neplatí $a = b$.

Tranzitivita: neplatí. Dk: Uvažujme $a = 2$, $b = 4$, $c = 13$. Pak $2\mathcal{R}4$ neboť 2 dělí $4 - 2 = 2$, také $4\mathcal{R}13$ neboť 3 dělí $13 - 4 = 9$, ale neplatí $2\mathcal{R}13$, neboť $13 - 2 = 11$ není dělitelné ani dvěma, ani třemi.
Poznámka: Asi mnozí jako já zkusili nejprve důkaz napsat. Začíná takto:
Předpoklad: $a\mathcal{R}b$ a $b\mathcal{R}c$. Pak máme

$$[2 \mid (b-a) \vee 3 \mid (b-a)] \wedge [2 \mid (c-b) \vee 3 \mid (c-b)].$$

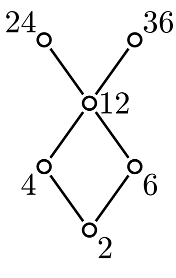
Všimněte si, že logické spojky teď nejsou stejné, a proto nemohu výraz přerovnávat! Jeho význam je, že dvojice (a, b) si svobodně vybírá, zda půjde cestou 2 či 3, a stejně tak si svobodně vybírá dvojice (b, c). Z toho vyplývá, že je třeba ošetřit v důkazu celkem čtyři možné varianty. Kdo má smůlu a začne variantou $2, 2$ a $3, 3$, tak zjistí, že pro ně tranzitivita funguje. Například takto pro dvojku:

$$[b - a = 2k \wedge c - b = 2l,\ k, l \in \mathbb{Z}] \implies c - a = 2(k + l) \implies a\mathcal{R}c.$$

Pak zkusí smíšený případ a zjistí, že tranzitivita nefunguje (vznikne nepříjemné $2k + 3l$). Pak už se snadno najde protipříklad.

Není to RAT, tedy to není částečné uspořádání.

2.



Maximální prvky jsou $24, 36$, největší prvek neexistuje, minimální prvek je 2, nejmenší prvek je 2.
Pro linearizaci jsou čtyři možnosti:
$2 \prec_L 4 \prec_L 6 \prec_L 12 \prec_L 24 \prec_L 36$
nebo
$2 \prec_L 4 \prec_L 6 \prec_L 12 \prec_L 36 \prec_L 24$
nebo
$2 \prec_L 6 \prec_L 4 \prec_L 12 \prec_L 24 \prec_L 36$
nebo
$2 \prec_L 6 \prec_L 4 \prec_L 12 \prec_L 36 \prec_L 24$.