DMA Domácí koronaúkol č. 7a

Tento úkol vypracujte a pak si v pátek zkontrolujte oproti vyvěšenému řešení.

1. Pro řetězec písmen w definujeme jeho délku $l(w)$ jako počet znaků.
Uvažujme relaci $\mathcal{R}$ na množině A konečných řetězců (třeba latické abecedy, ale klidně si zkuste i jinou) danou předpisem

$$w_1\mathcal{R}w_2 \iff l(w_1) = l(w_2),$$

tedy porovnáváme řetězce podle jejich délky.
a) Dokažte, že tato relace je ekvivalence.
b) Vyberte si z kalendáře pět jmen (náhodně či řízeně). Pro tuto množinu řetězců nakreslete graf relace $\mathcal{R}$ a vypište komponenty. Napište rozklad množiny odpovídající této relaci.

Poznámka: Když kreslíme graf ekvivalence, tak pro zjednodušení nekreslíme smyčky a namísto obousměrných šipek tam a zpět prostě kreslíme spojnice.

2. Uvažujte zobrazení $T\colon \mathbb{Z}^2 \mapsto \mathbb{Z}^2$ dané

$$T(m,n) = (m+n, m-n).$$

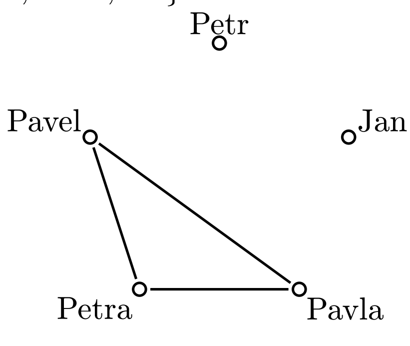
Dokažte, že zobrazení $S\colon \mathbb{Z}^2 \mapsto \mathbb{Z}^2$ dané

$$S(u,v) = \left(\tfrac{1}{2}(u+v), \tfrac{1}{2}(u-v)\right)$$

je inverzní k T.

Řešení:

1. a) Dokážeme reflexivitu, symetrii a tranzitivitu, rovnou pro relaci na celých čísel, je to stejná práce, pak to platí i pro všechny podmnožiny.
R: Nechť $w \in \mathbb{Z}$. $l(w) = l(w)$ a tedy $w\mathcal{R}w$.
S: Nechť $w_1, w_1 \in \mathbb{Z}$. Jestliže $w_1\mathcal{R}w_2$, pak $l(w_1) = l(w_2)$, proto i $l(w_2) = l(w_1)$ a tedy $w_2\mathcal{R}w_1$.
T: Nechť $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{Z}$. Jestliže $w_1\mathcal{R}w_2$ a $w_2\mathcal{R}w_3$, pak $l(w_1) = l(w_2)$ a $l(w_2) = l(w_3)$. Proto i $l(w_1) = l(w_3)$ a tedy $w_1\mathcal{R}w_2$.
b) Vybral jsem $A = \{$Petr,Pavel,Petra,Pavla,Jan$\}$.



Komponenty:
$[\text{Petr}]_{\mathcal{R}} = \{\text{Petr}\}$,
$[\text{Pavel}]_{\mathcal{R}} = [\text{Petra}]_{\mathcal{R}} = [\text{Pavla}]_{\mathcal{R}} = \{\text{Pavel,Petra,Pavla}\}$,
$[\text{Jan}]_{\mathcal{R}} = \{\text{Jan}\}$,
Rozklad:

$$\{\text{Petr,Pavel,Petra,Pavla,Jan}\} = \{\text{Petr}\} \cup \{\text{Pavel,Petra,Pavla}\} \cup \{\text{Jan}\}.$$

2. Definice požaduje, aby inverzní zobrazení k nějakému $T\colon A \mapsto B$ splňovalo

$$S(T(\diamondsuit)) = \diamondsuit \text{ pro všechna } \diamondsuit \in A$$
$$\text{a } T(S(\heartsuit)) = \heartsuit \text{ pro všechna } \heartsuit \in B$$

Zkusíme to otestovat pro naše T a S:

Pro $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ (z definičního oboru):

$$S(T(m,n)) = S(m+n, m-n) = \left(\tfrac{1}{2}((m+n)+(m-n)), \tfrac{1}{2}((m+n)-(m-n))\right) = (m,n).$$

Pro $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ (z cílového prostoru):

$$T(S(u,v)) = T\left(\tfrac{1}{2}(u+v), \tfrac{1}{2}(u-v)\right) = \left(\tfrac{1}{2}(u+v) + \tfrac{1}{2}(u-v), \tfrac{1}{2}(u+v) - \tfrac{1}{2}(u-v)\right) = (u,v).$$

Bohužel, ačkoliv to vyšlo, tak S není inverzní zobrazení k T, protože ve skutečnosti neexistuje. Kolik je $S(1,0)$? Vyjde $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, což neleží v $\mathbb{Z}^2$. Je tedy špatně definováno.
Tento úkol neměl být chytákem na vás, na papíře mám obě zobrazení jako $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ a pak je S inverzním k T, bohužel jsem pro ušetření práce zkopíroval a upravil jiný příklad a zapomněl jsem $\mathbb{Z}$ změnit na $\mathbb{R}$. Omlouvám se, zejména těm, které jsem zmátl a ztratili na tom čas.