DMA Domácí koronaúkol č. 7b

Tento úkol vypracujte a pak své řešení ukažte v rámci cvičení na MS Teams.

1. Nechť $\mathcal{R}$ je relace na A. Dokažte:
Je-li $\mathcal{R}$ antisymetrická, tak je i $\mathcal{R}^{-1}$ antisymetrická.
Použijte novou strukturu důkazu (viz obdobný příklad na cvičení/semináři).

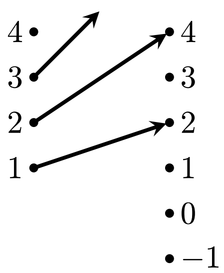
2. Uvažujte zobrazení T: $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z}$ dané $T(n) = 2n$. Rozhodněte, zda je toto zobrazení prosté a na. Své odpovědi dokažte.

Řešení:

1. Dk: Předpoklad: $\mathcal{R}$ antisymetrická. Dokážeme: $\mathcal{R}^{-1}$ antisymetrická.
Vezměme libovolné $\underline{a, b \in A}$ splňující $\underline{(a,b) \in \mathcal{R}^{-1}}$ a $\underline{(b,a) \in \mathcal{R}^{-1}}$. Pak $(b,a) \in \mathcal{R}$ a $(a,b) \in \mathcal{R}$, díky antisymetrii $\mathcal{R}$ je tedy $b = a$ neboli $\underline{a = b}$.
Je také možné udělat kroky
$\underline{[a\mathcal{R}^{-1}b \wedge b\mathcal{R}^{-1}a]} \longrightarrow [b\mathcal{R}a \wedge a\mathcal{R}b] \longrightarrow [a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a] \longrightarrow \underline{a = b}$.
Všimněte si, že jsme v druhém kroku neměnili pořadí prvků v relacích, ale použili komutativitu logické konjunkce $\wedge$.
V důkazu jsem dával pozor na přesný zápis antisymetrie, tedy že v rovnosti je stejné pořadí prvků jako v první relaci předpokladu. Je to podstatné? Z hlediska logiky samozřejmě ano, ale z hlediska praktického matematického života by to lidé obvykle neřešili, protože stejně víme, že v rovnosti na pořadí nezáleží. Takže bych to bral i takto:
$[a\mathcal{R}^{-1}b \wedge b\mathcal{R}^{-1}a] \longrightarrow [b\mathcal{R}a \wedge a\mathcal{R}b] \longrightarrow a = b$.

Poznámka: Je také možné použít náš tradiční jednodušší přímý postup od předpokladu k závěru:
Předpoklad: $\mathcal{R}$ antisymetrická $\longrightarrow (a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a) \implies a = b$.
Relace v předpokladu přepíšeme dle definice $\mathcal{R}^{-1}$ a dostaneme
$(b\mathcal{R}^{-1}a \wedge a\mathcal{R}^{-1}b) \implies a = b$. Díky komutativitě $\wedge$ pak
$(a\mathcal{R}^{-1}b \wedge b\mathcal{R}^{-1}a) \implies a = b$ a tedy $\mathcal{R}^{-1}$ je antisymetrická.
Tento typ důkazu má dvě nevýhody: Vyžaduje nějak logicky odůvodnit přechod od jednoho logického výroku v jiný, což vyžaduje určtou zkušenost. Zásadnější problém je, že selhává v komplikovanějších situacích, zejména v těch, kdy předpoklad a závěr nemají téměř stejnou logickou strukturu jako zde. Proto jsem v zadání chtěl, ať si procvičíte novou strukturu důkazu, která je výrazně flexibilnější.

2. Intuitivní představa je



Toto zobrazení je prosté.
Dk: Lib. $m, n \in \mathbb{N}$, předpokládáme $T(m) = T(n)$. To znamená $2m = 2n$, tedy $m = n$.

Na: Intuitivně: Zobrazení vyrábí sudá čísla. To ale nepokryje $\mathbb{Z}$.
Toto zobrazení není na. Dk: Zvolme $b = 13 \in \mathbb{Z}$. Pak neexistuje $n \in \mathbb{N}$ splňující $T(n) = 2n = 13$.
Poznámka: Je jasné, že za b lze zvolit libovolné liché číslo, libovolné záporné číslo či nulu.
Poznámka: Pokud nám nestačí intuice, je často dobrý nápad prostě zkusit důkaz: Vezmeme libovolné $b \in \mathbb{Z}$. Hledáme $n \in \mathbb{N}$ tak, aby $T(n) = b$. Takže chceme $2n = b$ neboli $n = \frac{1}{2}b$. Pak opravdu funguje vzorec $T(n) = 2n = 2 \cdot \frac{1}{2b} = b$, ale neplatí $n \in \mathbb{N}$ a tím se to zkazí.
Mimochodem to ukazuje, že když si někdo zvykne psát formálně to $k \in \mathbb{Z}$ a podobně, jak s tím pořád otravuju, a nezamyslí se nad tím, tak tady automaticky napíše $n \in \mathbb{N}$ a myslí si, že zobrazení je na.