**DMA Domácí koronaúkol č. 8b**

Tento úkol vypracujte a pak své řešení ukažte v rámci cvičení na MS Teams.

**1.** Nechť $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ jsou relace na stejné množině $A$.
Dokažte: Jestliže je $\mathcal{R}_1$ antisymetrická, pak je antisymetrická i relace $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$.
Rada: Je tam množinová operace, proto je lepší jazyk množin, tedy spíše psát $(a,b) \in \mathcal{R}$ než $a\mathcal{R}b$.

**2.** Pro následující množiny rozhodněte, zda jsou konečné, spočetné či nespočetné. Svou odpověď dokažte.

a) $M$ je množina všech vektorů z $\mathbb{N}^2$, jejichž druhá souřadnice je dvakrát větší než první.
Poznámka: $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

b) $M$ je množina všech přirozených čísel, která **nejsou** dělitelná třemi.

Pokud v argumentech pracujete s nějakými zobrazeními a jsou důležité jejich vlastnosti, tak je stačí zmínit, netřeba je podrobně dokazovat. V tomto příkladě se soustředíme na mohutnost, ne na vyšetřování zobrazení. Takto to bude i u zkoušky.
Ale z cvičných důvodů je zajímavé si alespoň důkazy prostoty udělat jako bonus.

**Řešení:**

**1.** Předpoklad: $\mathcal{R}_1$ antisymetrická. Ukážeme antisymetrii $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ dle definice.
$\underline{\forall a,b \in A\text{:}}$ $\underline{(a,b) \in \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \text{ a } (b,a) \in \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2}$ dává dle definice průniku $[(a,b) \in \mathcal{R}_1$ a $(a,b) \in \mathcal{R}_2]$ a $[(b,a) \in \mathcal{R}_1$ a $(b,a) \in \mathcal{R}_2]$.
(Komentář: Jsou to tři logické konjunkce za sebou, tedy lze ignorovat závorky a přerovnávat dle libosti. Také si všimneme, že vlastně nepotřebujeme všechny čtyři dvojice, stačí si vzhledem k předpokladu chytře vybrat dvě. Pokračujme v důkazu.)
Pak máme $(a,b) \in \mathcal{R}_1$ a $(b,a) \in \mathcal{R}_1$, dle antisymetrie $\mathcal{R}_1$ je $\underline{a = b.}$
Důkaz je hotov.

Jak na tento důkaz přijdeme? Chceme čtenáře přesvědčit, že $R_1 \cap R_2$ je antisymetrická. Co pro to musíme udělat? Na to odpoví definice antisymetrie. Je potřeba čtenáře postupnými kroky přesvědčit, že z informace $(a,b) \in \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ a $(b,a) \in \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ lze postupnými kroky dojít k $a = b$. Množinový zápis relací zde napoví víc než psát $a\mathcal{R}b$.

Poznámka: Občas se vyskytne tento „důkaz“:

$$a,b \in A\text{: } \underline{(a,b) \in \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2} \longrightarrow (a,b) \in \mathcal{R}_1 \xrightarrow{\text{(P)}} \underline{a = b}.$$

Zde jsou dvě věci špatně. Za prvé, aplikace předpokladu je chybná, protože antisymetrie relace $R_1$ nám dá $a = b$ pouze tehdy, pokud máme k dispozici fakta $(a,b) \in \mathcal{R}_1$ a $(b,a) \in \mathcal{R}_1$. Nám ale to druhé v důkazu chybí, nemáme tedy právo se na antisymetrii odvolávat.
Druhá špatná věc: Pokud spojíme začátek a konec, dostaneme

$$(a,b) \in \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \implies a = b.$$

To ale není antisymetrie.

**2.**
a) Máme $M = \{(1,1),(2,4),(3,6),(4,8),\dots\}$.
Množinu lze vyjádřit jako $M = \{(n,2n) : n \in \mathbb{N}\}$. Z toho se nabízí zobrazení $T(n) = (n,2n)$, které je vlastně bijekce $\mathbb{N} \overset{\text{na}}{\mapsto} M$. Množiny $\mathbb{N}$ a $M$ tedy mají stejnou mohutnost, proto je $M$ **spočetná**.

Je také možno ušetřit důkaz surjektivity a postupovat takto:
1. Zobrazení $T(n) = (n,2n)$ je prosté $\mathbb{N} \mapsto M$, proto $|\mathbb{N}| \le |M|$.
2. Evidentně $M \subseteq \mathbb{N}^2$, proto $|M| \le |\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$.
Spojením nerovností dostaneme $|M| = |\mathbb{N}|$.
Bonus: Důkazy vlastností pro $T(n) = (n,2n)$.
Prostota: Nechť $m,n \in \mathbb{N}$, $T(m) = T(n)$. Pak $(m,2m) = (n,2n)$, odtud $m = n$.
Na: Dáno $b \in M$. Dle definice $M$ musí být $b = (a,2a)$ pro nějaké $a \in \mathbb{N}$. Toto $a$ pak splňuje $T(a) = (a,2a) = b$.

b) Je snadné si představit, že množinu $M = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, \dots\}$ dokážeme propojit s $\mathbb{N}$, popřípadě očíslovat. Vzniká něco, co by měla být bijekce:

$$1 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 2,\ 3 \mapsto 4,\ 4 \mapsto 5,\ 5 \mapsto 7,\ \dots$$

Abychom ale dokázali, že je to bijekce, musíme mít pro ni vzorec, a to je dost obtížná záležitost (viz konec). Je proto lepší zkusit jinou strategii.

1. Protože $M \subseteq \mathbb{N}$, máme $|M| \le |\mathbb{N}|$. Množina $M$ tedy určitě není nespočetná, jinak řečeno je nejvýše spočetná.
2. Cítíme, že je **spočetná**, tedy potřebovali bychom ukázat nerovnost $|\mathbb{N}| \le |M|$. Jak to dokážeme? Nabízí se dvě cesty.

• Chceme-li dokázat onu nerovnost, pak bychom podle definice měli najít prosté zobrazení $T\colon \mathbb{N} \mapsto M$. Hledáme vzoreček, jehož výstupy by nikdy nebyly dělitelné trojkou, což je otázka inspirace, buď přijde, nebo ne (v tomto je občas matematika podobná umění a tak trochu zrádná).
Mě napadlo zobrazení $T(n) = 3n + 1$. Vede $\mathbb{N} \mapsto M$, protože čísla ve tvaru $3n + 1$ nejsou dělitelná třemi (dávají jedničku modulo 3). Jelikož je $T$ prosté, máme $|\mathbb{N}| \le |M|$, což spolu s opačnou nerovností potvrzuje spočetnost $M$.
Studenty napadly i jiné věci, třeba $T(n) = 2^n$ nebo $3^n - 1$.
Bonus: Důkazy vlastností pro $T(n) = 3n - 1$.
Prostota: Dáno $m, n \in \mathbb{N}$, předp. $T(m) = T(n)$. Pak $3m - 1 = 3n - 1$, tedy $m = n$.

• Existuje jeden snadný argument: Protože je $M$ nekonečná, podle věty z přednášky platí $|\mathbb{N}| \le |M|$. Takže $|M| = |\mathbb{N}|$ neboli $M$ je spočetná.
Tento důkaz má problém, že by se někdo mohl zeptat, jak víme, že je $M$ nekonečná. Obvykle se toto ukazuje tak, že v ní najdeme kopii přirozených čísel, což se dělá pomocí prostého zobrazení z $\mathbb{N}$ do dotyčné množiny. To nás ale vlastně vrátí na předchozí způsob řešení.
Dá se to nějak obejít? Jedna finta mě napadla. Víme, že prvočísel je nekonečně mnoho. To pak platí i pro prvočísla jiná než 3 (označme jejich množinu $P_{\not 3}$) a ta určitě nejsou dělitelná třemi, proto $P_{\not 3} \subseteq M$. To ukazuje, že také $M$ musí být nekonečná.
Jiná finta nalezená studenty: Sporem. Kdyby byla $M$ konečná, tak musí mít největší prvek, třeba $m$. To je přirozené číslo nedělitelné trojkou, pak ovšem také číslo $m + 3$ je nedělitelné trojkou a přirozené, tedy $m + 3 \in M$. Protože je $m$ největší, máme $m + 3 \le m$ neboli $3 \le 0$, což je spor.

Zajímavá alternativa: je možno napsat

$$M = \{3k + 1 :\ k \in \mathbb{N}\} \cup \{3k + 2 :\ k \in \mathbb{N}\}.$$

Pomocí bijekce $k \mapsto 3k + 1$, popřípadě $k \mapsto 3k + 2$ hravě ukážeme, že ty dvě množiny napravo jsou spočetné, tudíž i jejich sjednocení musí být spočetné.

Poznámka pro zvídavé: Jak mohou vypadat bijekce $\mathbb{N} \mapsto M$ pro čísla nedělitelná třemi?
Například $T(n) = n + \lfloor \frac{1}{2}(n-1) \rfloor$ (používá zaokrouhlení dolů), popřípadě $T(n) = n - 1 + \lceil \frac{1}{2}n \rceil$ (zaokrouhlení nahoru). Lze také použít $T(n) = n + \lfloor \frac{1}{2}(n-1) \rfloor$ jako bijekci $\mathbb{N}_0 \mapsto M$. Teď ovšem zkuste dokázat, že jsou prostá a na.

Další alternativa je definice indukcí:

$$T(1) = 1,\ T(2) = 1;\ T(n) = T(n-2) + 1 \text{ pro } n \ge 3.$$

Opět drobný problém: jak dokázat prostotu. Musela by se použít indukce.