DMA Domácí koronaúkol č. 9b

Tento úkol vypracujte a pak své řešení ukažte v rámci cvičení na MS Teams.

1. Dokažte indukcí, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\sum\limits_{k=1}^{n}(13^k - 13^{k-1}) = 13^n - 1$.

Poznámka: Zkuste si tu sumu rozepsat dlouhým zápisem, pak uvidíte, co se tam vlastně děje. Ale důkaz je lepší psát sumou, protože tři tečky jsou podezřelé.

2. Dokažte indukcí, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ platí $n^2 > n + 5$.

Řešení:

1. Suma vlastně vypadá takto:

$$\sum_{k=1}^{n}(13^k - 13^{k-1}) = (13^1 - 13^0) + (13^2 - 13^1) + (13^3 - 13^2) + \dots + (13^{n-1} - 13^{n-2}) + (13^n - 13^{n-1}).$$

Po zrušení závorek by si člověk tipnul, že se skoro vše pokrátí a zbyde pouze $13^n - 1$. Tomuto se říká „teleskopická“ řada, zacvakne se jako pirátský dalekohled. Ovšem někdo by mohl začít šťourat, co se vlastně děje v těch třech tečkách, a na to máme důkaz indukcí.

(0) Pro $n = 1$ to zjevně platí: $\sum\limits_{k=1}^{1}(13^k - 13^{k-1}) = 13^1 - 13^0 = 13^1 - 1$.

(1) Libovolné $n \in \mathbb{N}$: Předpokládáme, že $\sum\limits_{k=1}^{n}(13^k - 13^{k-1}) = 13^n - 1$.

Pak $\underline{\sum\limits_{k=1}^{n+1}(13^k - 13^{k-1})} = \sum\limits_{k=1}^{n}(13^k - 13^{k-1}) + (13^{n+1} - 13^{(n+1)-1})$

$\stackrel{\text{IP}}{=} (13^n - 1) + (13^{n+1} - 13^n) = \underline{13^{n+1} - 1}$.

Poznámka: Někteří studenti si úplně na začátku upravili daný výraz na

$$\sum_{k=1}^{n}(13^k - 13^{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}(13 \cdot 13^{k-1} - 13^{k-1}) = 12 \sum_{k=1}^{n} 13^{k-1}$$

a pak dělali důkaz s ním. Je to tak v pořádku. Viděl jsem také variantu $12 \sum\limits_{k=0}^{n-1} 13^k$ s posunem indexu.

2. $V(n)$: $n^2 > n + 5$.

(0): $n = 3$: Máme dokázat, že $9 > 8$, což je zjevně pravda.

(1): Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ je libovolné. Předpokládejme, že $n^2 > n + 5$.

(Komentář: Chceme dokázat, že pak platí $(n+1)^2 > (n+1)+5$ neboli $(n+1)^2 > n+6$. Obvykle je lepší začít od komplikovanější části, zkusíme vyrobit výraz n^2, na který pak aplikujeme indukční předpoklad. Jdeme na to:)

Pak

$$\underline{(n+1)^2} = n^2 + 2n + 1 \stackrel{\text{IP}}{>} (n+5) + 2n + 1 = (n+6) + 2n \underset{[2n \geq 0]}{\geq} n + 6 = \underline{(n+1)+5}.$$

Důkaz je hotov.

Komentář: Po aplikaci IP a úpravě vyšlo $3n + 6$, ale my potřebujeme $n + 6$. Naštěstí je cílový výraz menší než ten, co nám vyšel, takže je možné pokračovat v řetízku nerovností. Použili jsme nerovnost $\geq$, abychom ukázali, žo stačí, protože jednu ostrou už v řetízku máme, ale samozřejmě by bylo přirozenější mít i na konci ostrou nerovnost. U té „vynechávací“ nerovnosti je dobré uvést vysvětlující komentář. Viděl jsem také pěknou variaci toho konce

$$(n+1)^2 = \dots = 3n + 6 \underset{\substack{\uparrow \\ [n > 0 \implies 3n > n]}}{>} n + 6 = (n+1) + 5.$$