DMA Domácí koronaúkol č. 9c (příprava)

Toto jsou příklady na indukci vhodné obtížnosti pro semestrální písemku. Nejprve vždy příklad vyřešte samostatně a snažte se o pěkný zápis důkazů, pak se podívejte na další stranu na řešení.

1. Dokažte indukcí, že pro $n \in \mathbb{N}$ je

$$7 + 13 + 19 + \cdots + (6n+1) = n(3n+4) \qquad \text{neboli} \qquad \sum_{k=1}^{n} (6k+1) = n(3n+4).$$

2. Dokažte indukcí, že pro $n \in \mathbb{N}$ je

$$\frac{12}{13} + \frac{12}{13^2} + \frac{12}{13^3} + \cdots + \frac{12}{13^n} = 1 - \frac{1}{13^n} \qquad \text{neboli} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{12}{13^k} = 1 - \frac{1}{13^n}.$$

3. Dokažte indukcí, že pro $n \in \mathbb{N}$ je

$$\sum_{k=1}^{n} (\sin(k) - \sin(k-1)) = \sin(n).$$

4. Dokažte indukcí, že pro $n \in \mathbb{N}$ je

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

Řešení:

1. (0) $n=1$: $7 = 1\cdot(3\cdot 1+4)$ platí.

(1) $n\in\mathbb{N}$ libovolné, předpoklad: $\sum\limits_{k=1}^{n}(6k+1) = n(3n+4)$.

Pak $\sum\limits_{k=1}^{n+1}(6k+1) = \sum\limits_{k=1}^{n}(6k+1)+(6(n+1)+1) \overset{\text{IP}}{=\!=} n(3n+4)+(6n+7) = 3n^2+10n+7 = (n+1)(3(n+1)+4)$.

2. (0) $n=1$: $0=0$.
(1) $n\in\mathbb{N}$ libovolné, předpoklad: $\frac{12}{13} = 1-\frac{1}{13^1}$ platí.
Pak $\sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{12}{13^k} = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{12}{13^k}+\frac{12}{13^{n+1}} \overset{\text{IP}}{=\!=} 1-\frac{1}{13^n}+\frac{12}{13^{n+1}} = 1-\left(\frac{1}{13^n}-\frac{12}{13^{n+1}}\right) = 1-\frac{13-12}{13^{n+1}} = 1-\frac{1}{13^{n+1}}$.

3. (0) $n=1$: $(\sin(1)-\sin(0)) = \sin(1)$ platí.

(1) $n\in\mathbb{N}$ libovolné, předpoklad: $\sum\limits_{k=1}^{n}(\sin(k)-\sin(k-1)) = \sin(n)$.

Pak $\sum\limits_{k=1}^{n+1}(\sin(k)-\sin(k-1)) = \sum\limits_{k=1}^{n}(\sin(k)-\sin(k-1)) + (\sin(n+1)-\sin(n))$
$\overset{\text{IP}}{=\!=} \sin(n)+(\sin(n+1)-\sin(n)) = \sin(n+1)$.

4. (0) $n=1$: $\sum\limits_{k=1}^{n} k\cdot 2^k = (n-1)2^{n+1}+2$ platí.

(1) $n\in\mathbb{N}$ libovolné, předpoklad: $\sum\limits_{k=1}^{n} k\cdot 2^k = (n-1)2^{n+1}+2$.

Pak $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k\cdot 2^k = \sum\limits_{k=1}^{n} k\cdot 2^k + (n+1)2^{n+1} \overset{\text{IP}}{=\!=} (n-1)2^{n+1}+2+(n+1)2^{n+1} = 2n2^{n+1}+2$
$= ((n+1)-1)2^{(n+1)+1}+2$.