DMA Domácí koronaúkol č. 10a

Tento úkol vypracujte a pak si v pátek zkontrolujte oproti vyvěšenému řešení.

1. Dokažte indukcí, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ je číslo $3n^2 + 9n$ dělitelné šesti.
Rada: Pro snažší zápis je lepší dokazovat, že $3n^2 + 9n$ je (celočíselným) násobkem šesti.

2. Napište induktivní definici množiny všech kladných celých čísel, která jsou dělitelná pěti ale ne desíti.
Nápověda: Nejprve si napište prvních pár čísel z množiny, to by mělo napovědět.

Řešení:
1. (0) Pro $n = 0$ je $3 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 = 0$ zjevně násobkem šesti.
(1) Libovolné $n \in \mathbb{N}_0$: Předpokládáme, že $3n^2 + 9n = 6k$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$.
Pak $3(n+1)^2 + 9(n+1) = 3n^2 + 6n + 3 + 9n + 9 = (3n^2 + 9n) + (6n + 12)$
$\overset{\text{IP}}{=} 6k + 6n + 12 = 6(k + n + 2)$ a $k + n + 2 \in \mathbb{Z}$, je to násobek šesti.

2. Nejjednodušší je toto:
(0) $5 \in M$.
(1) $n \in M \implies n + 10 \in M$.