DMA Domácí koronaúkol č. 10b

Tento úkol vypracujte a pak své řešení ukažte v rámci cvičení na MS Teams.

1. Dokažte indukcí, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ splňující $n \geq 2$ je číslo $n^2 - n$ kladné.

2. Uvažujte funkci zadanou $f(0) = 1$, $f(1) = 2$ a $f(n+1) = f(n) + 2f(n-1)$ pro $n \in \mathbb{N}$. Spočítejte několik prvních hodnot této funkce, odhadněte obecný vzorec pro $f(n)$ a dokažte indukcí, že váš tip vyhovuje definici zadané funkce.

Řešení:
1. (0): $n = 2$: $2^2 - 2 = 2$ je opravdu kladné.
(1): Nechť $n \in \mathbb{N}$ je libovolné splňující $n \geq 2$. Předpokládejme, že $n^2 - n$ je kladné.
(Poznámka stranou: Chceme dokázat, že $(n+1)^2 - (n+1)$ je kladné.)
Pak $(n+1)^2 - (n+1) = n^2 + 2n + 1 - n - 1 = [n^2 - n] + 2n$, přičemž $n^2 - n$ je kladné podle indukčního předpokladu a $2n > 0$ také (viz $n \geq 2$), proto je celý součet kladný.
Důkaz hotov.
To „$n \in \mathbb{N}$“ v kroku (1) je možné vynechat, v důkazech indukcí se bere automaticky, že $n \in \mathbb{Z}$.
Je samozřejmě možné místo mluvení o kladnosti použít nerovnosti, tedy
(1) Nechť $n \geq 2$, IP: $n^2 - n > 0$. Pak
$(n+1)^2 - (n+1) = n^2 + 2n + 1 - n - 1 = [n^2 - n] + 2n \overset{\text{IP}}{>} 0 + 2n > 0$.
Existují alternativní koncovky, například
$(n+1)^2 - (n+1) = n^2 + 2n + 1 - n - 1 = n^2 + n \overset{\text{IP}}{>} n + n = 2n > 0$
nebo $(n+1)^2 - (n+1) = n^2 + 2n + 1 - n - 1 = n^2 + n \underset{[n>0]}{>} n^2 + n - 2n = n^2 - n \overset{\text{IP}}{>} 0$
nebo $(n+1)^2 - (n+1) = n^2 + 2n + 1 - n - 1 = n^2 + n \underset{[n>0]}{>} n^2 - n \overset{\text{IP}}{>} 0$.

Poznámka: Pokud v kroku (1) po příletu na $n^2 + n$ rovnou píšeme $n^2 + n > 0$ s tím, že sčítáme dvě kladná čísla, tak to je sice pravda, ale není to důkaz indukcí, neboť jsme nepoužili IP, že $n^2 - n > 0$. Tím pádem nepotřebujeme ani tu část (0) ani žádný předpoklad, jde o přímý důkaz o délce jednoho řádku:
- Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí $(n+1)^2 - (n+1) = n^2 + n > 0$.

Pokud ale je napsáno v zadání, že máme použít indukci, tak to samozřejmě není možné uznat.

2. $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = f(1) + 2f(0) = 4$, $f(3) = f(2) + 2f(1) = 8$, tipujeme $f(n) = 2^n$ pro $n \in \mathbb{N}_0$.
Správnost tohoto vzorce dokážeme indukcí, a to silným principem modifikovaným pro dva kroky zpět:
(0) Pro $n = 0$ a $n = 1$ to platí: $f(0) = 1 = 2^0$, $f(1) = 2 = 2^1$.
Poznámka: V obou zápisech pro f je první rovnítko dané v zadání, druhým ověříme shodu s uhodnutým vzorcem.
(1) Nechť $n \in \mathbb{N}$ libovolné. Předpokládejme, že $f(n) = 2^n$ a $f(n-1) = 2^{n-1}$.
Pak podle definice f a pak předpokladu máme

$$f(n+1) = f(n) + 2f(n-1) \overset{\text{IP}}{=\!=} 2^n + 2 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}.$$

Důkaz je hotov.

Poznámka: IP $f(n) = 2^n$ se dělá pro konkrétní zvolené n, proto tento vzorec nelze v kroku (1) použít pro $f(n-1)$ ani $f(n+1)$, protože $n \pm 1$ jsou už jiná čísla než n. Slabá indukce tedy neprojde.

FAQ: Jak můžu do f dosazovat nulu, když je v zadání uvedeno „pro $n \in \mathbb{N}$“?
A: Ta specifikace se týká jen té induktivní rovnice, říká nám, pro jaká n ji máme k dispozici. Navazuje to správně, protože nejmenší možné n v této specifikaci vede na rovnici

$$f(2) = f(1) + 2f(0)$$

a vidíme, že se tím pádem existence $f(0)$ očekává. Pokud bychom u té rovnice dali specifikaci „pro $n \geq 0$”, tak by také mohla vzniknout rovnice $f(1) = f(0) + 2f(-1)$ a máme problém.