

DMA: Písemka 1, verze 13 (řešení)

1.

$$(41 \cdot 24 + 9)^{92} \equiv 5^{92} = (5^{18})^5 \cdot 5^2 \equiv 1^5 \cdot 25 \equiv 6 \pmod{19}.$$

Pro $5^{18} \equiv 1$ použít malý Fermat, splněny předpoklady $n = 19$ prvočíslo a $\gcd(5, 19) = 1$.

2. Rovnice $52x + 144m = 12$

a/b	y	x
144	1	0
52	0	1
40	1	-2
12	-1	3
4●	4●	-11●
0	-13	36

Řešení z tabulky:

Obecné řešení vyjde $x = (-33) + 36k$ nebo $x = 3 + 36k$ pro $k \in \mathbb{Z}$, podle toho, který řádek z tabulky se použije.

Řešení v \mathbb{Z}_{144} je pak $x = 3, 39, 75, 111$.

Řešení dle vět: 1. Bezout: $52 \cdot (-11) + 144 \cdot 4 = 4$, chci napravo 12, proto násobím třemi: $52 \cdot (-33) + 144 \cdot 12 = 12$. Vidím $x_p = -33$, zato $m_p = 12$ mě nezajímá.

2. Homogenní: Zkrátím $52x + 144m = 0$ na $13x + 36m = 0$, prohození koeficientů dá $x_h = 36k$ a nezajímavé $m = 13k$, kde ještě mám změnit znaménko, ale stejně to nepotřebuju.

Takže $x = -33 + 36k$ a z množiny $\dots, -33, 3, 39, 75, 111, 147, \dots$ vybírám čísla ze \mathbb{Z}_{144} .

3. Symetrie platí. Důkaz:

$x, y \in \mathbb{R}$. Předp. $x\mathcal{R}y \longrightarrow 13 \mid (xy) \xrightarrow{\text{komut.}} 13 \mid (yx) \longrightarrow y\mathcal{R}x$.

Tranzitivita neplatí. Nejoblíbenější protipříklad: $1\mathcal{R}13\mathcal{R}1$. Zajímavý protipříklad (děkuji za něj): $1\mathcal{R}0\mathcal{R}1$. Vtipný pp (děkuji): $2.6\mathcal{R}5\mathcal{R}2.6$

4. Lib. $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Předpoklad $(ab) \mid c$. Pak $c = (ab)k$ pro jisté $k \in \mathbb{Z}$. Odtud $2c = 2abk = (2bk) \cdot a$, kde zjevně $2bk \in \mathbb{Z}$. Proto $a \mid (2c)$.

Hodnocení (hranice jsou fuzzy a 0.5 se zaokrouhluje v součtu vždy nahoru, tedy vlastně špatně):

19-20: výborně.

17-18: dobrý výkon.

okolo 15: Není to průšvih, ale chce se to ještě na látku podívat.

10-13: Dobrá zpráva: Žijete. Špatná správa: Lidé z tohoto rozmezí mívají u zkoušky znatelně vyšší úmrtnost. Ještě je ovšem s tím možné něco dělat.

Abych to stíhal, tak nechválím, proto si u každého příkladu bez komentáře sami připište „pěkné“.

Poznámka: Zpracování více obrázků funguje výborně. Příště tedy změním instrukce, nebudu chtít jednu stránku, ale větší písmo :-).

Děkuji za spolupráci.