Matematický seminář: Pracovní list # 2

Příklady vypracujte samostatně, výsledky se dozvíte na konci hodiny.
V případě problémů se přihlaste, vyučující vám pomůže.
Pokud máte pocit, že nestihnete na semináři všechno, tak se zaměřte hlavně na témata, která vás nejvíce pálí.

1. Zjednodušte co nejvíce $[(a+2)(a+3)-(a+2)^2]^3 - a^3$.

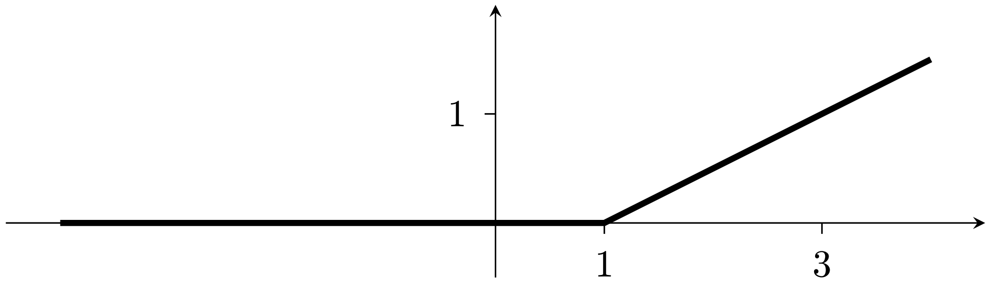
2. Zjednodušte co nejvíce $\left[\left(\dfrac{n+2}{n-2}\right)^3 \Big/ \dfrac{n^3+4n^2+4n}{3n^2-12n+12}\right] \cdot \dfrac{n}{3}$.

3. Pro $z_1 = 3+3i$ a $z_2 = 2-i$ spočítejte z_1+z_2, $z_1 \cdot z_2$ a $\frac{z_1}{z_2}$. Výsledek $\frac{z_1}{z_2}$ uveďte v základním algebraickém tvaru.
Vyjádřete z_1 v exponenciálním tvaru.

4. Napište rovnici přímky, která prochází bodem $(1,2)$ a má směrnici $\frac{1}{3}$.

5. Napište rovnici přímky, která prochází body $(1,3)$ a $(2,5)$.

6. Napište rovnici funkce $I\!R$, jejíž graf vypadá takto:



7. Vyřešte rovnici $\quad \ln(x-1) = 2$.

8. Určete definiční obor funkce $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}(x)}{x^2-25} + \ln\big(\sqrt{x}-2\big)$.
Výsledek zapište pomocí intervalů.

9. Vypočítejte limitu $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{\ln(x-1)}{x^3-3}\right)$.

10. Vypočítejte limitu $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \left(\frac{\cos(x)}{x-2}\right)$.

11. Vypočítejte limitu $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \left(\frac{e^x}{e^x-1}\right)$.

12. Vypočítejte limitu $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x\sin(x)}{x+1}\right)$.

13. Vypočítejte limitu $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\,\right)$.

Matematický seminář: Pracovní list # 2 řešení

1. Správná odpověď: $[2+a]^3 - a^3$ nebo $a^2 + 12a8 + 6$.

2. $\left[\left(\frac{n+2}{n-2}\right)^3 \Big/ \frac{n^3+4n^2+4n}{3n^2-12n+12}\right] \cdot \frac{n}{3} = \frac{\frac{(n+2)^3}{(n-2)^3}}{\frac{n\cdot(n^2+4n+4)}{3(n^2-4n+4)}} \cdot \frac{n}{3}$

$$= \frac{(n+2)^3}{(n-2)^3} \cdot \frac{n^2-4n+4}{n^2+4n+4} = \frac{(n+2)^3}{(n-2)^3} \cdot \frac{(n-2)^2}{(n+2)^2} = \frac{n+2}{n-2}.$$

3. $z_1 + z_2 = 5 + 2i$.

$z_1 \cdot z_2 = (3+3i)(2-i) = 6 - 3i + 6i - 3i^2 = 9 + 3i$.

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+3i}{2-i} = \frac{(3+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{6+3i+6i+3i^2}{2^2-i^2} = \frac{3+9i}{5} = \frac{3}{5} + \frac{9}{5}i$.

$|z_1| = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$, $\varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{Im}(z_1)}{\mathrm{Re}(z_1)}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{3}{3}\right) = \mathrm{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$, proto $z_1 = 3\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}i}$.

4. $y - 2 = \frac{1}{3}(x-1)$ neboli například $3y = x + 5$.

5. Směrnice je $k = \frac{5-3}{2-1} = 2$. $y - 3 = 2(x-1)$ neboli například $y = 2x + 1$.

6. $f(x) = \begin{cases} 0; & x \leq 1; \\ \frac{1}{2}(x-1); & x > 1 \end{cases}$ nebo $f(x) = \begin{cases} 0; & x < 1; \\ \frac{1}{2}(x-1); & x \geq 1. \end{cases}$

7. $e^{\ln(x-1)} = e^2$ odtud $x - 1^2$, proto $x = e^2 + 1$.

8. Podmínky: z arctg nic, jinak $x^2 - 25 \neq 0$, $\sqrt{x} - 2 > 0$ a $x \geq 0$.
$D(f) = (4,5) \cup (5,\infty)$.

9. $\ln(0^+) = -\infty$, proto $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{\ln(x-1)}{x^3-3}\right) \overset{\frac{-\infty}{-2}}{=\!=} \infty$.

10. $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\frac{\cos(x)}{x-2}\right) \overset{\frac{\cos(2)}{0^+}}{=\!=} -\infty$, protože $2 > \frac{\pi}{2}$, $2 < \frac{3\pi}{2}$ a tedy $\cos(2) < 0$.

11. $e^{0^-} = 1^-$ (viz například graf), tudíž $x \to 0^-$ znamená $e^x - 1 \to 0^-$. Proto $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{e^x}{e^x-1}\right) \overset{\frac{1}{0^-}}{=\!=} -\infty$.

12. Po dosazení vyjde $\frac{\infty\cdot ?}{\infty}$ (sinus osciluje v ∞). Chce to trik, třeba zkrátit x:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x\sin(x)}{x+1}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\sin(x)}{1+\frac{1}{x}}\right) \overset{\frac{\sin(\infty)}{1}}{=\!=} ?$

Úvaha: Pro $x \sim \infty$ je $\frac{\sin(x)}{1+\frac{1}{x}} \sim \frac{\sin(x)}{1} = \sin(x)$, proto $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x\sin(x)}{x+1}\right)$ neexistuje.

13. Po dosazení vyjde $\infty - \infty$, je třeba trik.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x+1}^{\,2} - \sqrt{x-1}^{\,2}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+1)-(x-1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right) \overset{\frac{2}{\infty}}{=\!=} 0.$$