Matematický seminář: Pracovní list # 3

Příklady vypracujte samostatně, výsledky se dozvíte na konci hodiny.
V případě problémů se přihlaste, vyučující vám pomůže.
Pokud máte pocit, že nestihnete na semináři všechno, tak se zaměřte hlavně na témata, která vás nejvíce pálí.

1. Pro $z_1 = 2\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}$ a $z_2 = 2e^{-\pi i}$ spočítejte $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$ a $\frac{z_1}{z_2}$.
Výsledek $z_1 + z_2$ uveďte v exponenciálním tvaru.
Výsledek $z_1 \cdot z_2$ uveďte v algebraickém tvaru.

2. Určete definiční obor funkce $f(x) = e^{\sin(x)} + \dfrac{\operatorname{arctg}(x)}{\ln(x)}$.

3. Najděte derivaci funkce $f(x) = \sin(x)e^x + \ln(x^4 + 1) + 3x^2 - 1$.

4. Najděte derivaci funkce $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{x}}$.

5. Najděte derivaci funkce $f(x) = \dfrac{x\,e^x}{x^2 + 1}$.

6. Najděte derivaci funkce $f(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{e^x - 1}$.

7. Najděte derivaci funkce $f(x) = \big(x\sin(2x)\big)^5$.

8. Najděte derivaci funkce $f(x) = \sqrt{\dfrac{\sin(x) + 3}{x}}$.

9. Najděte f' a f'' pro funkci $f(x) = \sin(x)\cos(2x)$.

10. Vypočítejte limitu $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x^2}{e^x - 1}\right)$.

11. Vypočítejte limitu $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x}{\ln(x)}\right)$.

12. Vypočítejte limitu $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\sin(\pi x)}{x - 1}\right)$.

13. Vypočítejte limitu $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 + 1}{e^x}\right)$.

Matematický seminář: Pracovní list # 3 řešení

1. $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = -2$, proto $z_1 + z_2 = 2i = 2e^{\frac{\pi}{2}i}$.

$z_1 \cdot z_2 = 4\sqrt{2}\, e^{-\frac{3}{4}\pi i} = -4 - 4i.$ $\qquad \dfrac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi i}.$

2. ln $\implies$ $x > 0$ a $\ln(x) \neq 0$, proto $D(f) = (0,1) \cup (1,\infty)$.

3. Nejprve linearita, pak součin a složená funkce:

$$\begin{aligned} f'(x) &= [\sin(x)]'e^x + \sin(x)[e^x]' + [\ln(x^4+1)]' + 3[x^2]' - [1]' \\ &= \cos(x)\, e^x + \sin(x)e^x + \tfrac{1}{x^4+1} \cdot [x^4+1]' + 3 \cdot 2x - 0 \\ &= \cos(x)\, e^x + \sin(x)e^x + \tfrac{4x^3}{x^4+1} + 6x,\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Je třeba zajistit $x^4 + 1 > 0$, to ale platí pro všechna reálná čísla.

4. Nejprve podíl, pak složená funkce:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{[e^{2x}]'\sqrt{x} - e^{2x}[\sqrt{x}]'}{[\sqrt{x}]^2} = \frac{e^{2x} \cdot [2x]'\sqrt{x} - e^{2x}\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} \\ &= \frac{e^{2x} \cdot 2\sqrt{x} - e^{2x}\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x},\ x > 0. \end{aligned}$$

Kdyby někdo chtěl, může dále zjednodušit:

$$f'(x) = \frac{e^{2x} \cdot 4[\sqrt{x}]^2 - e^{2x}}{2\sqrt{x}x} = \frac{4x\, e^{2x} - e^{2x}}{2\sqrt{x}x},\ x > 0.$$

5. Nejprve podíl, pak součin:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{[x\, e^x]'(x^2+1) - x\, e^x[x^2+1]'}{(x^2+1)^2} = \frac{([x]'e^x + x[e^x]')(x^2+1) - x\, e^x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{(1 \cdot e^x + x\, e^x)(x^2+1) - x\, e^x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{(1 \cdot e^x + x\, e^x)(x^2+1) - x\, e^x \cdot 2x}{(x^2+1)^2},\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

6. Nejprve podíl, pak složená funkce:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{[\sin(x^2)]'(e^x-1) - \sin(x^2)[e^x-1]'}{(e^x-1)^2} = \frac{\cos(x^2) \cdot [x^2]'(e^x-1) - \sin(x^2)e^x}{(e^x-1)^2} \\ &= \frac{\cos(x^2) \cdot 2x(e^x-1) - \sin(x^2)e^x}{(e^x-1)^2},\ x \neq 0. \end{aligned}$$

7. Nejprve mocnina a složená funkce, pak součin, na závěr složená funkce:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5\big(x\sin(2x)\big)^4 \cdot \big[x\sin(2x)\big]' = 5\big(x\sin(2x)\big)^4 \cdot \big([x]'\sin(2x) + x[\sin(2x)]'\big) \\ &= 5\big(x\sin(2x)\big)^4 \cdot \big(1 \cdot \sin(2x) + x\cos(2x)[2x]'\big) \\ &= 5\big(x\sin(2x)\big)^4 \cdot \big(\sin(2x) + 2x\cos(2x)\big),\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

8. Nejprve odmocnina a složená funkce, pak podíl:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{\sin(x)+3}{x}}} \cdot \Big[\frac{\sin(x)+3}{x}\Big]'$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{\sin(x)+3}} \cdot \frac{[\sin(x)+3]'x - (\sin(x)+3)[x]'}{x^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{\sin(x)+3}} \cdot \frac{\cos(x)\cdot x - (\sin(x)+3)}{x^2},\ x \neq 0.$$

9. Součin:

$$f'(x) = [\sin(x)]'\cos(2x) + \sin(x)[\cos(2x)]'$$
$$= \cos(x)\cos(2x) + \sin(x)(-\sin(2x))[2x]' = \cos(x)\cos(2x) - 2\sin(x)\sin(2x).$$
$$f''(x) = [\cos(x)]'\cos(2x) + \cos(x)[\cos(2x)]'$$
$$-\big(2[\sin(x)]'\sin(2x) + 2\sin(x)[\sin(2x)]'\big)$$
$$= \sin(x)\cos(2x) - 2\cos(x)\sin(2x) - 2\cos(x)\sin(2x) - 4\sin(x)\cos(2x)$$
$$= -4\cos(x)\sin(2x) - 3\sin(x)\cos(2x),\ x \in I\!R.$$

10. $\lim\limits_{x\to 0^-}\Big(\dfrac{x^2}{e^x-1}\Big) \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} \lim\limits_{x\to 0^-}\Big(\dfrac{[x^2]'}{[e^x-1]'}\Big) = \lim\limits_{x\to 0^-}\Big(\dfrac{2x}{e^x}\Big) \overset{\frac{0}{1}}{=\!=} 0.$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\dfrac{e^x}{\ln(x)}\Big) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} \lim\limits_{x\to\infty}\Big(\dfrac{[e^x]'}{[\ln(x)]'}\Big) = \lim\limits_{x\to\infty}\Big(\dfrac{e^x}{\frac{1}{x}}\Big) = \lim\limits_{x\to\infty}(x\,e^x) = \infty.$

12. $\lim\limits_{x\to 1^+}\Big(\dfrac{\sin(\pi x)}{x-1}\Big) \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} \lim\limits_{x\to 1^+}\Big(\dfrac{[\sin(\pi x)]'}{[x-1]'}\Big) = \lim\limits_{x\to 1^+}\Big(\dfrac{\pi\cos(\pi x)}{1}\Big)$
$= \pi\cos(\pi) = -\pi.$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\dfrac{x^2+1}{e^x}\Big) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} \lim\limits_{x\to\infty}\Big(\dfrac{[x^2+1]'}{[e^x]'}\Big) = \lim\limits_{x\to\infty}\Big(\dfrac{2x}{e^x}\Big) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} \lim\limits_{x\to\infty}\Big(\dfrac{2}{e^x}\Big) \overset{\frac{1}{\infty}}{=\!=} 0.$