Matematický seminář: Pracovní list # 5

Příklady vypracujte samostatně, výsledky se dozvíte na konci hodiny.
V případě problémů se přihlaste, vyučující vám pomůže.
Pokud máte pocit, že nestihnete na semináři všechno, tak se zaměřte hlavně na témata, která vás nejvíce pálí.

1. Určete definiční obor funkce $f(x) = \arcsin(x) + \dfrac{\ln(x)+1}{\sqrt{x}}$.

2. Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x \to (-1)^+} \left(\dfrac{\ln(x^2)}{x^2-1} \right)$.

3. Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{e^{1/x}-1}{\sqrt[3]{x}+1} \right)$.

4. Určete asymptoty funkce $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^3-8}$.

5. Vyšetřete spojitost funkce $f(x) = \begin{cases} \cos(x), & x \leq \pi; \\ \frac{\sin(2x)}{x-\pi}, & x > \pi. \end{cases}$

6. Najděte derivaci funkce $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{\cos(x^3)+2}$.

7. Najděte derivaci funkce $f(x) = \left(\dfrac{\sin(x^2)+2}{e^{2x}} \right)^x$.

8. Pro funkci $f(x) = x^3 - 12|x+1|$ určete maximální intervaly monotonie a lokální extrémy.

9. Pro funkci $f(x) = x\cos(x)$ sestavte Taylorův polynom stupně 2 se středem $a = \pi$.

10. Vypočítejte integrál $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)+3}\,dx$.

11. Vypočítejte integrál $\displaystyle\int (x+1)\,e^x\,dx$.

12. Vypočítejte integrál $\displaystyle\int \frac{1}{\ln^2(x)+1}\,\frac{dx}{x}$.

13. Vypočítejte integrál $\displaystyle\int \frac{3\,dx}{(x-1)(x+2)}$.

Matematický seminář: Pracovní list # 5 řešení

1. Požadavky $-1 \le x \le 1$, $x > 0$, $\sqrt{x} \neq 0$, proto $D(f) = (0,1\rangle$.

2. $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(\dfrac{\ln(x^2)}{x^2-1}\right) \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} \lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(\dfrac{\frac{2x}{x^2}}{2x}\right) = \lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = 1.$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{e^{1/x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}\right) \overset{\frac{e^0-1}{\infty}=\frac{0}{\infty}}{=\!=\!=} 0.$

4. $D(f) = (-\infty,2)\cup(2,\infty)$. Možnosti: svislá v $x=2$, vodorovná či šikmá v ∞ a v $-\infty$. Rozhodnou limity.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+1}{x^3-8}\right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=} \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{8}{x^3}}\right) = \dfrac{1+0}{1-0} = 1.$

Takže vodorovná asymptota $y=1$ v ∞.

$\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{x^3+1}{x^3-8}\right) \overset{\frac{9}{0^+}}{=\!=} \infty.$

Takže svislá asymptota v $x=2$. Jen ze zvědavosti:

$\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{x^3+1}{x^3-8}\right) \overset{\frac{9}{0^-}}{=\!=} -\infty.$

Nezávisle potvrdilo tu svislou.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^3+1}{x^3-8}\right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{8}{x^3}}\right) = 1.$

Takže vodorovná asymptota $y=1$ v $-\infty$.

5. Jasně spojitá na intervalech $(-\infty,\pi)$ a (π,∞). Spojitost v π? Porovnáme tři hodnoty.

$\lim\limits_{x\to\pi^-}\big(f(x)\big) = \lim\limits_{x\to\pi^-}\big(\cos(x)\big) = -1.$

$\lim\limits_{x\to\pi^+}\big(f(x)\big) = \lim\limits_{x\to\pi^+}\left(\dfrac{\sin(2x)}{x-\pi}\right) \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} \lim\limits_{x\to\pi^+}\left(\dfrac{2\cos(2x)}{1}\right) = 2.$

$f(\pi) = \cos(\pi) = -1.$

Závěr: f má v bodě $x=\pi$ skokovou nespojitost. Je tam spojitá zleva.

6. $f'(x) = \dfrac{[x\sqrt{x^2+1}]'(\cos(x^3)+2) - x\sqrt{x^2+1}[\cos(x^3)+2]'}{(\cos(x^3)+2)^2}$

$= \dfrac{\big(\sqrt{x^2+1} + x\,\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\big)(\cos(x^3)+2) - x\sqrt{x^2+1}(-\sin(x^3)\cdot 3x^2)}{(\cos(x^3)+2)^2},\ x\in\mathbb{R}.$

7. Je to obecná mocnina, nutno převést na exponenciálu.

$f(x) = e^{\ln\left(\left(\frac{\sin(x^2)+2}{e^{2x}}\right)^x\right)} = e^{x\ln\left(\frac{\sin(x^2)+2}{e^{2x}}\right)}$. Proto

$f(x) = e^{x\ln\left(\frac{\sin(x^2)+2}{e^{2x}}\right)}\Big[x\ln\Big(\dfrac{\sin(x^2)+2}{e^{2x}}\Big)\Big]' = \Big(\dfrac{\sin(x^2)+2}{e^{2x}}\Big)^x \times$

$\times\Big(\ln\Big(\dfrac{\sin(x^2)+2}{e^{2x}}\Big) + x\dfrac{e^{2x}}{\sin(x^2)+2}\,\dfrac{2x\cos(x^2)e^{2x} - (\sin(x^2)+2)2e^{2x}}{(e^{2x})^2}\Big),\ x\in\mathbb{R}.$

8. $D(f) = I\!R$. Potřebujeme derivaci, musíme se zbavit absolutní hodnoty v závislosti na znaménku výrazu $x+1$: $\quad f(x) = \begin{cases} x^3 - 12(x+1), & x \ge -1; \\ x^3 + 12(x+1), & x < -1. \end{cases}$

Derivujeme: $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 12, & x > -1; \\ 3x^2 + 12, & x < -1 \end{cases} = \begin{cases} 3(x-2)(x+2), & x > -1; \\ 3(x^2+4), & x < -1. \end{cases}$

Osud derivace pro $x = -1$ je nejasný, nemusíme to naštěstí řešit.

Kritické body? Patrně $x = -1$, kde derivace nejspíš neexistuje, dále řešíme $f' = 0$:

$$\begin{cases} (x-2)(x+2) = 0, & x > -1; \\ x^2 + 4 = 0, & x < -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \pm 2, & x > -1; \\ \text{nelze}, & x < -1. \end{cases}$$

Z první varianty ovšem neplatí $x = -2$, neboť nesplňuje $x > -1$. Dělícími body pro intervaly monotonie jsou tedy $x = -1, 2$.

	$(-\infty, -1\rangle$	$\langle -1, 2\rangle$	$\langle 2, \infty)$
$x-2:$	/////	$-$	$+$
$x+2:$	/////	$+$	$+$
$x^2+4:$	$+$	/////	/////
$f'(x):$	$+$	$-$	$+$
$f(x):$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Závěr: f je rostoucí na $(-\infty, -1\rangle$ a na $\langle 2, \infty)$. f je klesající na $\langle -1, 2\rangle$.
f má lokální maximum $f(-1) = 1$ a lokální minimum $f(2) = -28$.

9. Polynom bude mít tvar $T_2(x) = f(\pi) + f'(\pi)(x-\pi) + \frac{1}{2} f''(\pi)(x-\pi)^2$. Najdeme derivace, dosadíme:

$$\begin{array}{l|l} f(x) = x\cos(x) & f(\pi) = -\pi \\ f'(x) = \cos(x) - x\sin(x) & f'(\pi) = -1 \\ f''(x) = -2\sin(x) - x\cos(x) & f''(\pi) = \pi \qquad T_2(x) = -\pi - (x-\pi) + \frac{1}{2}\pi(x-\pi)^2 \end{array}$$

10. $$\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)+3}\,dx = \left| \begin{array}{c} y = \sin(x) + 3 \\ dy = \cos(x)\,dx \end{array} \right| = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C$$
$$= \ln|\sin(x)+3| + C,\ x \in I\!R.$$

11. $$\int (x+1)e^x\,dx = \left| \begin{array}{ll} f = x+1 & g' = e^x \\ f' = 1 & g = e^x \end{array} \right| = (x+1)e^x - \int 1 \cdot e^x\,dx$$
$$= (x+1)e^x - e^x + C,\ x \in I\!R.$$

12. $$\int \frac{1}{\ln^2(x)+1}\,\frac{dx}{x} = \left| \begin{array}{c} y = \ln(x) \\ dy = \frac{1}{x}\,dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \operatorname{arctg}(y) + C$$
$$= \operatorname{arctg}\big(\ln(x)\big) + C,\ x > 0.$$

13. $$\int \frac{3\,dx}{(x-1)(x+2)} = \int \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}\,dx.$$

$$A = \left.\frac{3}{(////)(x+2)}\right|_{x=1} = 1,\ B = \left.\frac{3}{(x-1)(////)}\right|_{x=-2} = -1, \text{ proto}$$

$$\int \frac{3\,dx}{(x-1)(x+2)} = \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{-1}{x+2}\,dx = \left| \begin{array}{c} u = x-1 \\ du = 1 \cdot dx \end{array} \middle| \begin{array}{c} v = x+2 \\ dv = dx \end{array} \right|$$
$$= \int \frac{du}{u} - \int \frac{dv}{v} = \ln|u| - \ln|v| + C = \ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C,\ x \neq -2, 1.$$