

Matematický seminář: Pracovní list # 6

Příklady vypracujte samostatně, výsledky se dozvíte na konci hodiny.

V případě problémů se přihlaste, vyučující vám pomůže.

Pokud máte pocit, že nestihnete na semináři všechno, tak se zaměřte hlavně na témata, která vás nejvíce pálí.

1. Určete definiční obor funkce $f(x) = \ln(x^2 - x) + \arccos\left(\frac{x}{2}\right)$.

2. Vypočítejte limitu $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} \left(\frac{-\cos(x)}{\sin(x) - 1} \right)$.

3. Určete asymptoty funkce $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x + 2}$.

4. Vypočítejte limity $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos\left(\frac{x^2}{x+1}\right) \frac{5x - x^3}{x^3 + x - 1} \right)$

a $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos\left(\frac{x^2}{x+1}\right) \frac{5x - \ln(x)}{x^3 + x - 1} \right)$.

5. Najděte derivaci funkce $f(x) = \frac{e^x}{\cos(x) + 2} \cdot (x^3 + \ln(x^2 + 1))$.

6. Najděte derivaci funkce $f(x) = x^{-1} \sqrt{x^2} e^{5x}$.

7. Pro funkci $f(x) = x^3 - 6x \cdot |x + 1|$ určete intervaly konvexity/konkávity a inflexní body.

8. Pro funkci $f(x) = \ln(1 + x)$ sestavte Taylorův polynom stupně 3 se středem $a = 0$.

Tipněte si, jak vypadá T_n .

9. Vypočítejte integrál $\int 10(e^x + 1)^4 e^x dx$.

10. Vypočítejte integrál $\int (x - 1) \sin(x) dx$.

11. Vypočítejte integrál $\int 18x^2 \cos(1 - x^3) dx$.

12. Vypočítejte integrál $\int (8x + 1) \ln(x) dx$.

13. Sestavte obecný rozklad racionální lomené funkce $\frac{5x^3 - 19x^2 + 44}{(x + 1)(x - 1)^2(x^2 + 4)}$ na

parciální zlomky a určete ty z konstant, které lze získat zakrývací metodou.

Jestli vám zbyl čas a troufáte si, najděte i ostatní.

Matematický seminář: Pracovní list # 6 řešení

1. $x(x - 1) > 0$ a $-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1$. První podmínka dá $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, druhá dá $-2 \leq x \leq 2$, pronikneme, $D(f) = \langle -2, 0 \rangle \cup (1, 2)$.

$$2. \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} \left(\frac{-\cos(x)}{\sin(x) - 1} \right) \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{L'H}} \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right) \stackrel{\frac{1}{0^-}}{\text{L'H}} -\infty.$$

Proč 0^- ? Pokud $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$, tak se uvažují x o trošku větší než $\frac{\pi}{2}$ a pro ně je kosinus záporný (viz graf).

3. $D(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$. Možnosti: svislá v $x = -2$, vodorovná či šikmá v ∞ a v $-\infty$. Rozhodnou limity.

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x - 2}{x + 2} \right) \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\text{L'H}} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{2}{x}} \right) = \frac{\infty + 1 - 0}{1 + 0} = \infty.$$

Není vodorovná, ale šance na šikmou, algoritmus:

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x} \right) \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\text{L'H}} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} \right) = \frac{1 + 0 - 0}{1 + 0} = 1.$$

Pořád šance na šikmou.

$$B = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - Ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x - 2}{x + 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x - 2}{x + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (-1) = -1.$$

Takže šikmá asymptota $y = x - 1$ v ∞ .

$$b) \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \left(\frac{x^2 + x - 2}{x + 2} \right) \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{L'H}} \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \left(\frac{2x + 1}{1} \right) = -3.$$

Svislá není potvrzena, ale ještě má šanci. Limitu $x \rightarrow (-2)^-$ zkusíme jinak:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \left(\frac{x^2 + x - 2}{x + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \left(\frac{(x + 2)(x - 1)}{x + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (x - 1) = -3.$$

Takže svislá asymptota v $x = 2$ určitě není.

c) Zkoumání v $-\infty$ je podobné jako v ∞ :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + x - 2}{x + 2} \right) \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\text{L'H}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x + 1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{2}{x}} \right) = -\infty.$$

$$A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} \right) = 1.$$

$$B = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - Ax) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + x - 2}{x + 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x - 2}{x + 2} \right) = -1.$$

Takže šikmá asymptota $y = x - 1$ v $-\infty$.

4. Pro $x \rightarrow \infty$ je $\frac{x^2}{x + 1} \sim \frac{x^2}{x} = x \rightarrow \infty$, takže první člen v obou limitách vychází $\cos(\infty)$, což neexistuje, je to stále oscilující veličina. Vše tedy závisí na tom, jak se chová druhý člen.

a) Pro $x \rightarrow \infty$ je $\frac{5x - x^3}{x^3 + x - 1} \sim \frac{-x^3}{x^3} = -1$. Potvrzení výpočtem, asi nejrychlejší

$$\text{je krácení: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x - x^3}{x^3 + x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{5}{x^2} - 1}{1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}} \right) = -1.$$

Každopádně násobíme člen, který osciluje mezi -1 a 1 , členem, který je nakonec v zásadě roven -1 , jako celek to tedy osciluje mezi -1 a 1 .

Závěr: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos\left(\frac{x^2}{x+1}\right) \frac{5x - x^3}{x^3 + x - 1} \right)$ neexistuje.

b) Pro $x \rightarrow \infty$ je $\ln(x) \ll x$ a proto $\frac{5x - \ln(x)}{x^3 + x - 1} \sim \frac{5x}{x^3} \rightarrow 0$. Tento odhad

potvrdíme: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x - \ln(x)}{x^3 + x - 1} \right) \stackrel{\infty}{\text{PH}} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5 - \frac{1}{x}}{3x^2 + 1} \right) = 0$.

Takže se člen s oscilací, která je omezená, násobí členem jdoucím k nule, proto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos\left(\frac{x^2}{x+1}\right) \frac{5x - \ln(x)}{x^3 + x - 1} \right) = 0.$$

$$\begin{aligned} 5. \quad f'(x) &= \left[\frac{e^x}{\cos(x) + 2} \right]' \cdot (x^3 + \ln(x^2 + 1)) + \frac{e^x}{\cos(x) + 2} \cdot [x^3 + \ln(x^2 + 1)]' \\ &= \frac{e^x(\cos(x) + 2) - e^x(-\sin(x))}{(\cos(x) + 2)^2} \cdot (x^3 + \ln(x^2 + 1)) + \frac{e^x}{\cos(x) + 2} \cdot \left(3x^2 + \frac{2x}{x^2 + 1} \right), \\ & \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

6. Pravidlo pro derivaci obecné odmocniny není, převod: $f(x) = (x^2 e^{5x})^{1/(x-1)}$. Pravidlo pro derivaci obecné mocniny také není, řeší se to převodem na exponenciálu:

$f(x) = e^{\ln((x^2 e^{5x})^{1/(x-1)})} = e^{\frac{\ln(x^2 e^{5x})}{x-1}}$. Teď lze derivovat, nejprve pomocí $[e^y]' = e^y \cdot y'$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\frac{\ln(x^2 e^{5x})}{x-1}} \cdot \left[\frac{\ln(x^2 e^{5x})}{x-1} \right]' = x^{-1} \sqrt{x^2 e^{5x}} \cdot \frac{[x^2 e^{5x}]' (x-1) - \ln(x^2 e^{5x})}{(x-1)^2} \\ &= x^{-1} \sqrt{x^2 e^{5x}} \frac{2x e^{5x} + 5x^2 e^{5x} (x-1) - \ln(x^2 e^{5x})}{(x-1)^2}, \quad x \neq 0, 1. \end{aligned}$$

7. Budeme pracovat s druhou derivací, proto se nejprve zbavíme absolutní hodnoty, rozhodne znaménko výrazu $x + 1$:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 6x \cdot (x + 1), & x \geq -1; \\ x^3 - 6x \cdot (-(x + 1)), & x < -1 \end{cases} = \begin{cases} x^3 - 6x^2 - 6x, & x \geq -1; \\ x^3 + 6x^2 + 6x, & x < -1. \end{cases}$$

$$\text{Pak } f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 12x - 6, & x > -1; \\ 3x^2 + 12x + 6, & x < -1 \end{cases} \quad \text{a } f''(x) = \begin{cases} 6x - 12, & x > -1; \\ 6x + 12, & x < -1. \end{cases}$$

Dělicí body: určitě $x = -1$, ještě řešíme $f'' = 0$:

$$\begin{cases} 6(x - 2) = 0, & x > -1; \\ 6(x + 2) = 0, & x < -1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2, & x > -1; \\ x = -2, & x < -1. \end{cases}$$

Oba body vyhovují podmínkám, za kterých se hledaly, $2 > -1$ a $-2 < -1$, proto jsou platné. Dělicí body jsou $-2, -1, 2$, budou čtyři intervaly. Vynecháme šestky, jsou kladné a znaménko neovlivní.

	$(-\infty, -2)$	$\langle -2, -1 \rangle$	$\langle -1, 2 \rangle$	$\langle 2, \infty \rangle$
$x - 2$:	//////	//////	-	+
$x + 2$:	-	+	//////	//////
$f'(x)$:	-	+	-	+
$f(x)$:	∩	∪	∩	∪

inflexní body:

$$f(-2) = 4$$

$$f(-1) = -1$$

$$f(2) = -28$$

f je konvexní na $\langle -2, -1 \rangle$ a na $\langle 2, \infty \rangle$; konkávní na $(-\infty, -2)$ a na $\langle -1, 2 \rangle$.

8. Tvar polynomu je $T_3(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2}f''(0)(x-0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)(x-0)^3$. Najdeme derivace, dosadíme:

$$\begin{array}{l|l} f(x) = \ln(1+x) & f(0) = 0 \\ f'(x) = \frac{1}{x+1} & f'(0) = 1 \\ f''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} & f''(0) = -1 \\ f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} & f'''(0) = 2 \end{array}$$

$$T_3(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

Trefil se, kdo zkusil $\ln(1+x) \sim x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}x^n$.

9. Složená funkce vyzývá k substituci.

$$\begin{aligned} \int 10(e^x + 1)^4 e^x dx &= \left| \begin{array}{l} y = e^x + 1 \\ dy = e^x dx \end{array} \right| = \int 10y^4 dy = 10 \cdot \frac{y^5}{5} + C \\ &= 2(e^x + 1)^5 + C, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

10. Typický příklad na per partes.

$$\begin{aligned} \int (x-1) \sin(x) dx &= \left| \begin{array}{ll} f = x-1 & g' = \sin(x) \\ f' = 1 & g = -\cos(x) \end{array} \right| = -(x-1) \cos(x) - \int -\cos(x) dx \\ &= -(x-1) \cos(x) + \int \cos(x) dx = -(x-1) \cos(x) + \sin(x) + C, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

11. Substitute projde.

$$\begin{aligned} \int 18x^2 \cos(1-x^3) dx &= \left| \begin{array}{l} y = 1-x^3 \\ dy = -3x^2 dx \\ -6 dy = 18x^2 dx \end{array} \right| = \int \cos(y)(-6) dy = -6 \int \cos(y) dy \\ &= -6 \sin(y) + C = -6 \sin(1-x^3) + C, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

12. Další typ na per partes, tentokrát se ale bude derivovat logaritmus.

$$\begin{aligned} \int (8x+1) \ln(x) dx &= \left| \begin{array}{ll} f = \ln(x) & g' = 8x+1 \\ f' = \frac{1}{x} & g = 4x^2+x \end{array} \right| \\ &= (4x^2+x) \ln(x) - \int (4x^2+x) \frac{1}{x} dx = (4x^2+x) \ln(x) - \int 4x+1 dx \\ &= (4x^2+x) \ln(x) - 2x^2 - x + C, x > 0. \end{aligned}$$

13. Obecný rozklad:

$$\frac{5x^3 - 19x^2 + 44}{(x+1)(x-1)^2(x^2+4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+4}.$$

Zakrývací metoda:

$$A = \frac{5x^3 - 19x^2 + 44}{(////)(x-1)^2(x^2+4)} \Big|_{x=-1} = \frac{20}{20} = 1,$$

$$C = \frac{5x^3 - 19x^2 + 44}{(x+1)(////)(x^2+4)} \Big|_{x=1} = \frac{30}{10} = 3.$$

Zbytek roznásobovací metodou, viz další strana jako bonus.

Nejprve vynásobíme rovnost výše jmenovatelem (za A, C dosadíme).

$$5x^3 - 19x^2 + 44 = (x - 1)^2(x^2 + 4) + B(x + 1)(x - 1)(x^2 + 4) \\ + 3(x + 1)(x^2 + 4) + (Dx + E)(x + 1)(x - 1)^2.$$

Roznásobíme a sloučíme mocniny:

$$5x^3 - 19x^2 + 44 = (1 + B + D)x^4 + (1 - D + E)x^3 + (8 + 3B - D - E)x^2 \\ + (4 + D - E)x + (16 - 4B + E).$$

Porovnáním koeficientů obou stran dostaneme soustavu rovnic

$$1 + B + D = 0$$

$$1 - D + E = 5$$

$$8 + 3B - D - E = -19$$

$$4 + D - E = 0$$

$$16 - 4B + E = 44$$

Upravíme na standardní tvar a řešíme oblíbeným způsobem (eliminací, Gauss-Jordan, Kramer), dostáváme $B = -5$, $D = 4$, $E = 8$. Proto

$$\frac{5x^3 - 19x^2 + 44}{(x + 1)(x - 1)^2(x^2 + 4)} = \frac{-1}{x + 1} - \frac{5}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{4x + 8}{x^2 + 4}.$$

Opravdový drsoň by ještě udělal zkoušku převedením pravé strany na společný jmenovatel.