Matematický seminář: Pracovní list # 7

Příklady vypracujte samostatně, výsledky se dozvíte na konci hodiny.
V případě problémů se přihlaste, vyučující vám pomůže.
Pokud máte pocit, že nestihnete na semináři všechno, tak se zaměřte hlavně na témata, která vás nejvíce pálí.

1. Určete definiční obor funkce $f(x) = e^x\sqrt{\sin(x)+1} + \dfrac{1}{\cos(x)+1}$.

2. Vypočítejte limitu $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x+x}{\ln(13-x)}\right)$.

3. Vypočítejte limitu $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\big(x\ln(e^x-1)\big)$.

4. Najděte derivaci funkce $f(x) = \sin\left(x + \dfrac{\ln(x)}{x^2+1}\right)$.

5. Pro funkci $f(x) = |x+1|\,e^{-x}$ určete maximální intervaly monotonie a lokální extrémy.

6. Najděte globální maximum a minimum funkce $f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{x^2+4}$ na množině $M = \langle 1, 3\rangle$.
Jak se změní odpověď, pokud budeme uvažovat množinu $N = \langle 1, \infty)$?

7. Vypočítejte integrál $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+13}\,dx$.

8. Vypočítejte integrál $\displaystyle\int (2x+8)\cos(2x)\,dx$.

9. Vypočítejte integrál $\displaystyle\int_0^{\pi/4} (e^{\sin(2x)}+5)\cos(2x)\,dx$.

10. Vypočítejte integrál $\displaystyle\int \frac{x+4}{(x-1)(x^2+4)}\,dx$.

11. Vypočítejte obsah konečné oblasti vymezené křivkami $y = x^2$ a $y = x + 2$.

12. Vypočítejte determinant matice $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & -2 \\ 2 & -13 & 7 & 21 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ alespoň dvěma způsoby.

13. Vyřešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 - x_4 + x_6 &= 0 \\ x_2 + 2x_4 - x_5 &= 0 \\ x_5 - 2x_6 &= 0. \end{aligned}$$

Množinu řešení vyjádřete jako lineární obal nějaké báze.

Matematický seminář: Pracovní list # 7 řešení

1. Podmínka $\sin(x)+1 \geq 0$ platí vždy. Podmínka $\cos(x)+1 \neq 0$ neboli $\cos(x) \neq -1$ dává $x \neq \pi + 2k\pi$.
Zápis pomocí intervalů? Vzniknou intervaly jako $\cdots\cup(-\pi,\pi)\cup(\pi,3\pi)\cup\cdots$, zápis je tedy $D(f) = \bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty} \big((2k-1)\pi,(2k+1)\pi\big)$.

2. $$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x+x}{\ln(13-x)}\right) \overset{\frac{0+\infty}{\infty}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x+1}{\frac{1}{13-x}\cdot(-1)}\right) = \lim_{x\to-\infty}\big((x-13)(e^x+1)\big) = -\infty.$$

3. Dosazení, $e^{0^+} = 1^+$, proto $\ln(e^{0^+}-1) = \ln(0^+) = -\infty$ a limita je typu $0\cdot\infty$, ten se převádí algebraickým trikem na podíl, aby šlo použít l'Hospitalovo pravidlo.
$$\lim_{x\to0^+}\big(x\ln(e^x-1)\big) \overset{0\cdot\infty}{=\!=} \lim_{x\to0^+}\left(\frac{\ln(e^x-1)}{\frac{1}{x}}\right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} \lim_{x\to0^+}\left(\frac{\frac{e^x}{e^x-1}}{\frac{-1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to0^+}\left(-\frac{x^2e^x}{e^x-1}\right),$$
teď je to $\frac{0}{0}$. Lepší než aplikovat přímo l'Hospitala je limitu rozdělit:
$$\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{x^2e^x}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to0^+}\left(-e^x\right)\cdot\lim_{x\to0^+}\left(\frac{x^2}{e^x-1}\right) \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} -1\cdot\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2x}{e^x}\right) = 0.$$

4. $f'(x) = \cos\left(x+\dfrac{\ln(x)}{x^2+1}\right)\cdot\left(1+\dfrac{\frac{1}{x}(x^2+1)-\ln(x)2x}{(x^2+1)^2}\right)$, $x>0$.

5. Zbavíme se absolutní hodnoty: $f(x) = \begin{cases} (x+1)\,e^{-x}, & x \geq -1; \\ -(x+1)\,e^{-x}, & x < -1. \end{cases}$

Pak $f'(x) = \begin{cases} -x\,e^{-x}, & x > -1; \\ x\,e^{-x}, & x < -1. \end{cases}$

$f' = 0 \iff \begin{cases} -x\,e^{-x} = 0, & x > -1; \\ -x\,e^{-x} = 0, & x < -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, & x > -1; \\ x = 0, & x < -1 \text{ (neplatí)}. \end{cases}$

Dělící body: $x=-1$, $x=0$.

	$(-\infty,-1\rangle$	$\langle-1,0\rangle$	$\langle0,\infty)$
$-x$:	/////	$+$	$-$
x :	$-$	/////	/////
e^{-x} :	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$:	$-$	$+$	$-$
$f(x)$:	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

f je rostoucí na $\langle-1,0\rangle$
f je klesající na $(-\infty,-1\rangle$ a na $\langle0,\infty)$
lok. min: $f(-1)=0$
lok. max: $f(0)=1$

6. Kandidáti na globální extrémy jsou koncové body intervalu a kritické body:
$$0 = f'(x) = \frac{2(x+2)(x^2+4)-(x+2)^2 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{(x+2)(8-4x)}{(x^2+4)^2} \text{ dává } x=2.$$
a) Kandidáti: $f(1) = \dfrac{9}{5}$, $f(2)=2$, $f(3)=\dfrac{25}{13}$. Porovnáme.

Závěr: $\max\limits_M(f) = 2 = f(2)$, $\min\limits_M(f) = \dfrac{9}{5} = f(1)$.

b) Kandidáti (v případě problémů „dosadíme“ limitou):

$f(1) = \dfrac{9}{5}$, $f(2) = 2$, $f(\infty) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{(x+2)^2}{x^2+4}\right) = 1$. Porovnáme.
Závěr: $\max\limits_M(f) = 2 = f(2)$, $\min\limits_M(f)$ neexistuje (infimum je rovno 1).

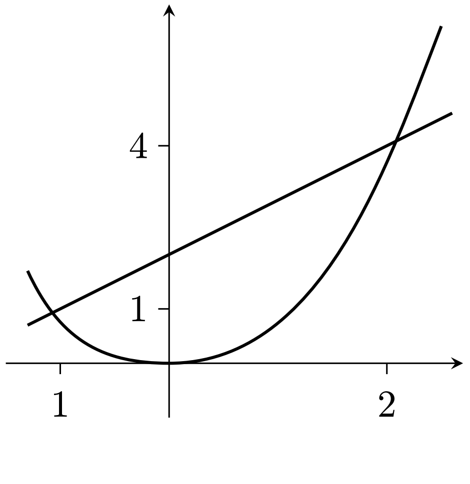
7. $$\int x^2\sqrt{x^3+13}\,dx = \left|\begin{array}{r} y = x^3+13 \\ dy = 3x^2dx \\ \frac{1}{3}dy = x^2dx \end{array}\right| = \int \frac{1}{3}\sqrt{y}\,dy = \int \frac{1}{3}\,y^{\frac{1}{2}}\,dy$$
$$= \frac{1}{3}\frac{y^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9}\sqrt{x^3+13}^{\;3} + C,\ x \geq -\sqrt[3]{13}.$$

8. $$\int (2x+8)\cos(2x)\,dx = \left|\begin{array}{ll} f = 2x+8 & g' = \cos(2x) \\ f' = 2 & g = \frac{1}{2}\sin(2x) \end{array}\right|$$
$$= (2x+8)\frac{1}{2}\sin(2x) - \int \sin(2x)\,dx = (x+4)\sin(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + C,\ x \in I\!R.$$

9. $$\int\limits_0^{\pi/4} (e^{\sin(2x)}+5)\cos(2x)\,dx = \left|\begin{array}{r} y = \sin(2x) \\ dy = 2\cos(2x)\,dx \\ \frac{1}{2}dy = \cos(2x)\,dx \\ x = \pi/4 \implies y = 1 \\ x = 0 \implies y = 0 \end{array}\right| = \int\limits_0^1 \frac{1}{2}(e^y+5)\,dy$$
$$= \left[\tfrac{1}{2}(e^y+5y)\right]_0^1 = \tfrac{1}{2}(e+5) - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}e + 2.$$

10. $$\frac{x+4}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$
Zakrývačka: $A = \left.\dfrac{x+4}{(////)(x^2+4)}\right|_{x=1} = 1$, roznásobením pak
$\dfrac{x+4}{(x-1)(x^2+4)} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{-x}{x^2+4}$. Proto
$$\int \frac{x+4}{(x-1)(x^2+4)}\,dx = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{x\,dx}{x^2+4} = \left|\begin{array}{r} u = x-1 \\ du = dx \end{array}\right|\left|\begin{array}{r} y = x^2+4 \\ dy = 2x\,dx \\ \frac{1}{2}dy = x\,dx \end{array}\right|$$
$$= \int \frac{du}{u} - \int \frac{\frac{1}{2}\,dy}{y} = \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + C,\ x \neq 1.$$
Kdo chce, napíše třeba $-\dfrac{1}{2}\ln\!\left(\dfrac{(x-1)^2}{x^2+4}\right) + C$.

11. Obrázek: Parabola protťatá přímkou.



Nutno nalézt průsečíky, jsou to body $(-1,1)$ a $(2,4)$.

Plocha je dána integrálem z „horní“ funkce mínus „dolní“, proto
$$A = \int\limits_{-1}^{2} x + 2 - x^2\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}.$$

12. Rozvoj dle prvního sloupce, pak dle prostředního řádku:
$$|A| = 0 - 2\cdot\begin{vmatrix}5 & 1 & -2\\ 0 & 6 & 0\\ 3 & -1 & 2\end{vmatrix} + 0 - 0 = -2\cdot\left(-0 + 6\cdot\begin{vmatrix}5 & -2\\ 3 & 2\end{vmatrix} - 0\right) = -12\cdot(5\cdot 2 - (-2)\cdot 3)$$
$$= 12\cdot 16 = -192.$$
Řádkovými úpravami na trojúhelníkový tvar:
$$|A| = -\begin{vmatrix}2 & -13 & 7 & 21\\ 0 & 5 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 6 & 0\\ 0 & 3 & -1 & 2\end{vmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{vmatrix}2 & -13 & 7 & 21\\ 0 & 5 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 6 & 0\\ 0 & 15 & -5 & 10\end{vmatrix} \quad \text{aby se dole lépe odčítalo}$$
$$= -\frac{1}{5}\begin{vmatrix}2 & -13 & 7 & 21\\ 0 & 5 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & -8 & 16\end{vmatrix} = -\frac{1}{5}\cdot 6\cdot 8\begin{vmatrix}2 & -13 & 7 & 21\\ 0 & 5 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{vmatrix}$$
$$= -\frac{1}{5}\cdot 48\begin{vmatrix}2 & -13 & 7 & 21\\ 0 & 5 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{vmatrix} = -\frac{1}{5}\cdot 48\cdot 2\cdot 5\cdot 1\cdot 2 = -192.$$
13. Převod levých stran homogenní soustavy na matici:
$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2\end{pmatrix}.$$
Již je v základním tvaru. Vidíme, že pivoty nejsou v třetím, čtvrtém a šestém sloupci zleva, tyto proměnné lze tedy zvolit libovolně, zavedeme tři parametry: $x_3 = r$, $x_4 = s$, $x_6 = t$. Dosadíme do rovnic:
$$\begin{aligned} x_1 - s + t &= 0\\ x_2 + 2s - x_5 &= 0 \implies x_5 = 2t,\ x_2 = 2t - 2s,\ x_1 = s - t.\\ x_5 - 2t &= 0\end{aligned}$$
Obecné řešení je tedy $(s-t, 2t-2s, r, s, 2t, t)$ pro $r, s, t \in \mathbb{R}$.
Vyjádříme si jej jako kombinaci vektorů:
$(s-t, t-2s, r, s, 2t, t) = r(0,0,1,0,0,0) + s(1,-2,0,1,0,0) + t(-1,2,0,0,2,1)$.
Proto je množina všech řešení rovna podprostoru
$$\big\langle\big\{(0,0,1,0,0,0), (1,-2,0,1,0,0), (-1,2,0,0,2,1)\big\}\big\rangle.$$