Matematický seminář: Pracovní list # 8

Příklady vypracujte samostatně, výsledky se dozvíte na konci hodiny. Zaměřte se hlavně na témata, která vás nejvíce pálí.
V případě problémů se přihlaste, vyučující vám pomůže.

1. Určete definiční obor funkce $f(x) = \dfrac{e^{1/x}}{x-1}$ a pak najděte limity v krajních bodech intervalů $D(f)$.

2. Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{x\sin(2\pi x)}{x-1}\right)$.

3. Vyšetřete spojitost funkce $f(x) = \begin{cases} \ln(3-x), & x<3; \\ \dfrac{\ln(x-2)}{\cos(\pi x)}, & x \geq 3. \end{cases}$

4. Najděte derivaci funkce $f(x) = \ln\big(5 + |2x-4|\big)$.

5. Pro funkci $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 - 4x, & x<0; \\ \sqrt[5]{x^2-4x+5}, & x \geq 0 \end{cases}$ určete maximální intervaly monotonie a lokální extrémy.

6. Najděte tečnu (tečny) ke grafu funkce $f(x) = x^3+1$, která je kolmá (které jsou kolmé) na přímku p: $x + 12y = 1$.

7. Vypočítejte integrál $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln(x)+1)}{x}\,dx$.

8. Vypočítejte integrál $\displaystyle\int_1^e (18x^2+2x)\ln(x)\,dx$.

9. Vypočítejte integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1}$.

10. Uvažujte racionální lomenou funkci $\dfrac{8x^2+8x+64}{(x+1)^2(x-3)^2(x^2+1)}$.
Napište, jak vypadá obecně její rozklad na parciální zlomky, a pak určete ty konstanty, které lze získat pomocí zakrývací metody.

11. Vypočítejte integrál $\displaystyle\int_3^\infty \frac{5x}{(x-2)(x+3)}\,dx$.

12. Uvažujte vektorový prostor $V = \{(x,-x,y,0,2x);\ u,v \in I\!R\}$ a v něm vektory $\vec{u} = (1,-1,2,0,2)$, $\vec{v} = (2,-2,1,0,4)$.
Dokažte, že $B = \{\vec{u},\vec{v}\}$ je báze prostoru V.

13. Dokázali jsme, že $B = (\vec{u},\vec{v})$ je báze prostoru V. Uvažujte v něm vektory $\vec{a} = (3,-3,0,0,6)$ a $\vec{b} = (3,-3,3,0,6)$.
a) Spočítejte $\vec{a}+\vec{b}$.
b) Najděte souřadnice $[\vec{a}\,]_B$ a $[\vec{b}\,]_B$ vektorů $\vec{a},\vec{b}$ vzhledem k bázi B.
c) Sečtěte souřadnice $[\vec{a}\,]_B$ a $[\vec{b}\,]_B$ (jako vektory). Který vektor z V má souřadnice $[\vec{a}\,]_B + [\vec{b}\,]_B$? Jaké poučení z toho plyne?

Matematický seminář: Pracovní list # 8 řešení

1. $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1,\infty)$.

$$\lim_{x\to\infty}(f) \overset{\frac{e^0}{\infty}}{=\!=} 0; \qquad \lim_{x\to 0^+}(f) \overset{\frac{e^\infty}{-1}}{=\!=} -\infty; \qquad \lim_{x\to 1^+}(f) \overset{\frac{e}{0^+}}{=\!=} \infty;$$

$$\lim_{x\to -\infty}(f) \overset{\frac{e^0}{-\infty}}{=\!=} 0; \qquad \lim_{x\to 0^-}(f) \overset{\frac{e^{-\infty}}{-1}}{=\!=} \frac{0}{-1} = 0; \qquad \lim_{x\to 1^-}(f) \overset{\frac{e}{0^-}}{=\!=} -\infty.$$

2. $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{x\sin(2\pi x)}{x-1}\right) \underset{\text{l'H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}} \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{\sin(2\pi x) + 2\pi x\cos(2\pi x)}{1}\right) = 2\pi.$

3. Zjevně spojitá na $(-\infty, 3)$ a na $(3,\infty)$.

$$f(3) = \frac{\ln(1)}{\cos(3\pi)} = 0; \qquad \lim_{x\to 3^+}(f) \overset{x>3}{=\!=} \lim_{x\to 3^+}\left(\frac{\ln(x-2)}{\cos(\pi x)}\right) = 0;$$

$$\lim_{x\to 3^-}(f) \overset{x<3}{=\!=} \lim_{x\to 3^-}\big(\ln(3-x)\big) \overset{\ln(0^+)}{=\!=} -\infty.$$

Závěr: f má v bodě $x=3$ podstatnou nespojitost. Je tam spojitá zprava.

4. $f(x) = \begin{cases} \ln(5+(2x-4)), & 2x-4>2; \\ \ln(5-(2x-4)), & 2x-4\le 2 \end{cases} = \begin{cases} \ln(2x+1), & x>2; \\ \ln(9-2x), & x\le 2. \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{2x+1}, & x>2; \\ \frac{-2}{9-2x}, & x<2. \end{cases}$$

$$f'_+(2) = \lim_{x\to 2^+}(f') \overset{x>2}{=\!=} \lim_{x\to 2^+}\left(\frac{2}{2x+1}\right) = \frac{2}{5};$$

$$f'_-(2) = \lim_{x\to 2^-}(f') \overset{x<2}{=\!=} \lim_{x\to 2^-}\left(\frac{-2}{9-2x}\right) = -\frac{2}{5}.$$

Závěr: $f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{2x+1}, & x>2; \\ \text{neex.}, & x=2; \\ \frac{-2}{9-2x}, & x<2. \end{cases}$

5. $D(f) = I\!R$.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x-4, & x<0; \\ \frac{1}{5}(x^2-4x+5)^{-4/5}\cdot(2x-4), & x>0. \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \iff \begin{cases} -2x-4=0, & x<0; \\ 2x-4=0, & x>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-2, & x<0; \\ x=2, & x>0. \end{cases}$$

f' neexistuje v $D(f)$? Patrně $f = 0$, dále vzhledem k $\dfrac{1}{(x^2-4x+5)^{4/5}}$ nutno prozkoumat $x^2-4x+5=0$, to nenastane.

Dělící body: $x = -2, 0, 2$.

	$(-\infty,-2\rangle$	$\langle -2, 0\rangle$	$\langle 0, 2\rangle$	$\langle 2,\infty)$
$-2x-4$:	$+$	$-$	/////	/////
$2x-4$:	/////	/////	$-$	$+$
$(x^2-4x+5)^{-4/5}$:	/////	/////	$+$	$+$
$f'(x)$:	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$:	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Protože f není spojitá v 0, sousední intervaly shodné monotonie nelze spojit bez dalšího zkoumání. Porovnáme, zda v místě spoje funkce skáče dolů či nahoru: $f(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+}\big((x^2-4x+5)^{1/5}\big) = 5^{1/5}$, $f(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-}(1-x^2-4x) = 1$, tedy $f(0^-) < f(0^+)$. Vidíme následující průběh, když přecházíme přes $x=0$ zleva doprava: Nejprve funkce klesá, pak poskočí nahoru a zase klesá. Tyto dva sousedící intervaly monotonie proto nelze spojit.

Závěr: f je rostoucí na $(-\infty,-2\rangle$ a na $\langle 2,\infty)$. f je klesající na $\langle -2,0)$ a na $(0,2\rangle$. f má lokální maximum $f(-2)=5$ a lokální minimum $f(2)=1$.

6. Nevíme kde, takže hledáme tečnu v obecném bodě a: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ neboli $y - a^3 - 1 = 3a^2(x-a)$.
Daná přímka má zase rovnici $y = -\frac{1}{12}x + \frac{1}{12}$.
Aby byly kolmé, musí jejich směrnice $k_T = 3a^2$ a $k = -\frac{1}{12}$ splňovat $k_T \cdot k = -1$, proto $k_T = \dfrac{-1}{-\frac{1}{12}} = 12$. Rovnice $3a^2 = 12$ má dvě řešení $a = \pm 2$, budou tedy dvě tečny dle zadání:
T_1: $y - 9 = 12(x-2)$ neboli $y = 12x - 15$.
T_2: $y + 7 = 12(x+2)$ neboli $y = 12x + 17$.

7. $$\int \frac{\cos(\ln(x)+1)}{x}\,dx = \left| \begin{array}{c} y = \ln(x)+1 \\ dy = \frac{1}{x}\,dx \end{array} \right| = \int \cos(y)\,dy = \sin(y) + C$$
$$= \sin(\ln(x)+1) + C,\ x > 0.$$

8. $$\int_1^e (18x^2+2x)\ln(x)\,dx = \left| \begin{array}{ll} f = \ln(x) & g' = 18x^2+2x \\ f' = \frac{1}{x} & g = 6x^3+x^2 \end{array} \right|$$
$$= \Big[(6x^3+x^2)\ln(x)\Big]_1^e - \int_1^e (6x^3+x^2)\frac{1}{x}\,dx = 6e^3 + e^2 - 0 - \int_1^e 6x^2 + x\,dx$$
$$= 6e^3+e^2 - \Big[2x^3 + \frac{1}{2}x^2\Big]_1^e = 6e^3+e^2-2e^3-\frac{1}{2}e^2+2+\frac{1}{2} = 4e^3+\frac{1}{2}e^2+\frac{5}{2}.$$

9. $$\int_0^1 \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1} = \left| \begin{array}{c} y = e^x \\ dy = e^x dx \\ x = 1 \implies y = e \\ x = 0 \implies y = 1 \end{array} \right| = \int_1^e \frac{dy}{y^2+1} = \Big[\operatorname{arctg}(y)\Big]_1^e = \operatorname{arctg}(e) - \frac{\pi}{4}.$$

10. $$\frac{8x^2+8x+64}{(x+1)^2(x-3)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-3} + \frac{D}{(x-3)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+1}.$$
$$B = \frac{8x^2+8x+64}{(////)(x-3)^2(x^2+1)}\bigg|_{x=-1} = \frac{64}{32} = 2;$$
$$D = \frac{8x^2+8x+64}{(x+1)^2(////)(x^2+1)}\bigg|_{x=3} = \frac{160}{160} = 1.$$

11. Problém v nekonečnu, jinak OK. $$\frac{5x}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}.$$

$$A = \frac{5x}{(\cancel{x-2})(x+3)}\bigg|_{x=2} = 2, \qquad B = \frac{5x}{(x-2)(\cancel{x+3})}\bigg|_{x=-3} = 3.$$

$$\int \frac{5x}{(x-2)(x+3)}\,dx = \int \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+3}\,dx$$
$$= 2\ln|x-2| + 3\ln|x+3| + C = \ln\big|(x-2)^2(x+3)^3\big| + C.$$

(Při výpočtu nevlastního integrálu se doporučuje najít primitivní funkci v nějakém kompaktním tvaru. Tady to shodou okolností není třeba, ale někdy ano, tak je dobré si na to zvykat.)

$$\int\limits_3^\infty \frac{5x}{(x-2)(x+3)}\,dx = \Big[\ln\big|(x-2)^2(x+3)^3\big|\Big]_3^\infty$$
$$= \lim_{x\to\infty}\big(\ln\big|(x-2)^2(x+3)^3\big|\big) - 3\ln(6) \overset{\ln(\infty)}{=\!=\!=} \infty.$$

12. a) Lineární nezávislost. Nejjednodušší je vytvořit matici a zeptat se na její hodnost: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 2\\ 2 & -2 & 1 & 0 & 4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Vyšly dva nezávislé řádky, tedy původní dva vektory jsou nezávislé.

Pokud bychom chtěli rozhodnout podle definice, zajímala by nás množina řešení rovnice $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$. Vektorově

$(\alpha + 2\beta, -\alpha - 2\beta, 2\alpha + \beta, 0, 2\alpha + 4\beta) = (0, 0, 0, 0, 0)$, výsledná soustava pěti rovnic má jediné řešení $\alpha = \beta = 0$, což ukazuje nezávislost.

b) B generuje V? Vezměme libovolný vektor z V, tedy vektor $\vec{a} = (x, -x, y, 0, 2x)$. Dá se vyjádřit jako lineární kombinace $\vec{u}, \vec{v}$?

Jedna možnost je řešit soustavu $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{a}$ pěti rovnic o dvou neznámých, nebo dáme všechny tři vektory do matice a zeptáme se na hodnost.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 2\\ 2 & -2 & 1 & 0 & 4\\ x & -x & y & 0 & 2x\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & y-2x & 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Vyšla matice s hodností dva, tedy přidaný třetí řádek se dá vyjádřit jako kombinace prvních dvou, což přesně jsme chtěli vědět.

13. a) $\vec{a} + \vec{b} = (6, -6, 3, 0, 12)$.

b) Je třeba vyřešit soustavu pěti rovnic $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{a}$ neboli

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta &= 3\\ -\alpha - 2\beta &= -3\\ 2\alpha + \beta &= 0 \qquad \Longrightarrow\ \alpha = -1, \beta = 2 \ \Longrightarrow\ [\vec{a}]_B = (-1, 2).\\ 0 &= 0\\ 2\alpha + 4\beta &= 6 \end{aligned}$$

Podobně pro $\vec{b}$, vyjde $[\vec{b}]_B = (1, 1)$.

c) $[\vec{a}]_B + [\vec{b}]_B = (0, 3)$.

Hledaný vektor z V je $\vec{x} = 0 \cdot \vec{u} + 3 \cdot \vec{v} = (6, -6, 3, 0, 12) = \vec{a} + \vec{b}$.

Vyšlo to stejně jako v a), operace s vektory se převádějí na operace se souřadnicemi, což může být někdy snažší (zde dvě čísla oproti šesti u původních vektorů). To „snažší“ samozřejmě záleží na tom, zda umíme efektivně najít ty souřadnice.