Matematický seminář: Pracovní list # 9

Příklady vypracujte samostatně, výsledky se dozvíte na konci hodiny. Zaměřte se hlavně na témata, která vás nejvíce pálí.
V případě problémů se přihlaste, vyučující vám pomůže.

1. Určete definiční obor funkce $f(x) = \sqrt[x]{\ln(x)}$.

2. Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[x]{e^x + 1}\right)$.

3. Určete asymptoty funkce $f(x) = e^{-1/x} + \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(x)$.

4. Najděte derivaci funkce $f(x) = e^{|x-2|} - |x-2|$.

5. Pro funkci $f(x) = \displaystyle\int\limits_{13}^{x} e^{t^4-8t^2}\,dt$ určete intervaly kon[vex/káv]ity a inflexní body.

6. Pro funkci $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ sestavte Taylorův polynom stupně 3 s vhodným středem. Použijte jej k odhadu hodnoty $4 \cdot f(1)$. Kolik je vlastně $4 \cdot f(1)$?
Co bychom asi dostali při použití polynomu T_n?

7. Vypočítejte integrál $\displaystyle\int\limits_{0}^{5\pi} (x+5)\sin\left(\tfrac{x}{5}\right)\,dx$.

8. Vypočítejte integrál $\displaystyle\int \frac{\sin^2(x) + 4\sin(x) + 4}{\sin^2(x)(\sin^2(x)+4)}\cos(x)\,dx$.

9. Vypočítejte integrál $\displaystyle\int \frac{\cosh(x)}{\sqrt{1-\sinh^2(x)}}\,dx$. Nemusíte určovat obor platnosti.

10. Vypočítejte integrál $\displaystyle\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\ln(2x)}{x^2}\,dx$.

11. Číslo $z = \dfrac{3-i}{1+i-\frac{2i}{3+i}}$ převeďte nejprve na základní algebraický tvar a pak na exponenciální tvar.

12. Vyřešte soustavu lineárních rovnic danou maticí s parametrem

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & a^2 \end{array}\right).$$

13. Uvažujme množinu V všech funkcí definovaných a diferencovatelných na $\mathbb{R}$ a množinu W všech funkcí definovaných na $\mathbb{R}$.
Dokažte, že s běžnými operacemi $f+g$ a $c \cdot f$ jde o vektorové (lineární) prostory.
Nápověda: Ukažte, že jsou to podprostory vektorového prostoru všech reálných funkcí s běžnými operacemi.
Dokažte, že zobrazení $L: V \mapsto W$ dané předpisem $L(f) = f'$ je lineární a určete jeho jádro $\operatorname{Ker}(L)$.

Matematický seminář: Pracovní list # 9 řešení

1. Převod obecné (od)mocniny: $f(x) = (\ln(x))^{1/x} = e^{\frac{\ln(\ln(x))}{x}}$. $D(f) = (1, \infty)$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[x]{e^x+1}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{\frac{\ln(e^x+1)}{x}}\right) = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(e^x+1)}{x}\right)}$.
Situace $\frac{\infty}{\infty}$, krok stranou:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(e^x+1)}{x}\right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{e^x}{e^x+1}}{1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{e^x}}\right) = 1.$$

L'Hospital by taky šel. Návrat zpět: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[x]{e^x+1}\right) = e^1 = e$.

3. $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)\big) \overset{e^0+\dots}{=\!=\!=} 1 + \dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi}{2} = 2.$ Závěr: Vodorovná asymptota $y = 2$ v ∞.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\big(f(x)\big) \overset{e^{-\infty}+0}{=\!=\!=} 0 + 0 = 0.$ Zatím nic.

$\lim\limits_{x\to 0^-}\big(f(x)\big) \overset{e^{\infty}+0}{=\!=\!=} \infty.$ Svislá asymptota v $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)\big) \overset{e^0+\dots}{=\!=\!=} 1 - \dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi}{2} = 0.$ Závěr: Vodorovná asymptota $y = 0$ v $-\infty$.

4. $f(x) = \begin{cases} e^{x-2} - (x-2), & x \geq 2; \\ e^{-(x-2)} + (x-2), & x < 2 \end{cases} \implies f'(x) = \begin{cases} e^{x-2} - 1, & x > 2; \\ -e^{-(x-2)} + 1, & x < 2. \end{cases}$

Derivace ve dvojce:

$f'_+(2) = \lim\limits_{x\to 2^+}\big(f'(x)\big) \overset{x>2}{=\!=\!=} \lim\limits_{x\to 2^+}(e^{x-2} - 1) = 0;$

$f'_-(2) = \lim\limits_{x\to 2^-}\big(f'(x)\big) \overset{x<2}{=\!=\!=} \lim\limits_{x\to 2^-}(-e^{x-2} + 1) = 0.$

Závěr: $f'(x) = \begin{cases} e^{x-2} - 1, & x > 2; \\ 0, & x = 2; \\ -e^{-(x-2)} + 1, & x < 2. \end{cases}$

5. Potřebujeme $f''(x)$. Fundamentální věta kalkulu: $\left[\int_a^x g(t)\,dt\right]' = g(x)$. Proto $f'(x) = e^{x^4-8x^2}$ a $f''(x) = (4x^3 - 16x)e^{x^4-8x^2} = 4x(x-2)(x+2)e^{x^4-8x^2}$.
Dělící body: $-2, 0, 2$.

	$(-\infty, -2\rangle$	$\langle -2, 0\rangle$	$\langle 0, 2\rangle$	$\langle 2, \infty)$
x :	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$:	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+2$:	$-$	$+$	$+$	$+$
$e^{x^4-8x^2}$:	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$:	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$:	$\frown$	$\smile$	$\frown$	$\smile$

f je konvexní na $\langle -2, 0\rangle$ a na $\langle 2, \infty)$. f je konkávní na $(-\infty, -2\rangle$ a na $\langle 0, 2\rangle$.
Inflexní body v $x = -2, 0, 2$.

6. Do arkustangensu nejraději dosazujeme nulu, tedy $a = 0$.

Obecně pak $T_3(x) = f(0) + f'(\pi)(x-0) + \frac{1}{2}f''(0)(x-0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)(x-0)^3$.

$$\begin{array}{r|l} f(x) = \operatorname{arctg}(x) & f(0) = 0 \\ f'(x) = \frac{1}{x^2+1} & f'(0) = 1 \\ f''(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} & f''(0) = 0 \\ f'''(x) = \frac{2x^2-2}{(x+1)^3} & f'''(0) = -2 \qquad T_3(x) = x - \frac{1}{3}x^3. \end{array}$$

Proto $4 \cdot f(1) \sim 4T_3(1) = 4\big(1-\frac{1}{3}\big)$. Přesně $4f(1) = \pi$.
Vyšší stupeň polynomu dá $\pi \sim 4\big(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - ...\big)$

7. $\displaystyle\int_0^{5\pi} (x+5)\sin\big(\tfrac{x}{5}\big)\,dx = \left|\begin{array}{ll} f = x+5 & g' = \sin(\frac{x}{5}) \\ f' = 1 & g = -5\cos(\frac{x}{5}) \end{array}\right|$

$$= \Big[-5(x+5)\cos\big(\tfrac{x}{5}\big)\Big]_0^{5\pi} - \int_0^{5\pi} -5\cos\big(\tfrac{x}{5}\big)\,dx = 5(5\pi+5)+25+\Big[25\sin\big(\tfrac{x}{5}\big)\Big]_0^{5\pi}$$
$$= 25\pi + 50 + 0 - 0 = 25\pi + 50.$$

8. $\displaystyle\int \frac{\sin^2(x)+4\sin(x)+4}{\sin^2(x)(\sin^2(x)+4)}\cos(x)\,dx = \left|\begin{array}{c} y = \sin(x) \\ dy = \cos(x)\,dx \end{array}\right| = \int \frac{y^2+4y+4}{y^2(y^2+4)}\,dy.$

$\displaystyle\frac{y^2+4y+4}{y^2(y^2+4)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y^2} + \frac{Cy+D}{y^2+4}, \qquad B = \frac{y^2+4y+4}{y^2(y^2+4)}\bigg|_{y=0} = 1.$

$y^2+4y+4 = Ay(y^2+4) + 1\cdot(y^2+4) + (Cy+D)y^2$, odtud
$y^2+4y+4 = (A+C)y^3 + (D+1)y^2 + 4Ay + 4$. Proto $A = 1$, $C = -1$, $D = 0$.

$$\int \frac{y^2+4y+4}{y^2(y^2+4)}\,dy = \int \frac{dy}{y} + \int \frac{dy}{y^2} - \int \frac{y}{y^2+4}\,dy = \left|\begin{array}{c} z = y^2+4 \\ dz = 2y\,dy \end{array}\right|$$
$$= \ln|y| + \int y^{-2}\,dy - \int \frac{\frac{1}{2}\,dz}{z} = \ln|y| - y^{-1} - \frac{1}{2}\ln|z| + C$$
$$= \ln|\sin(x)| - \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{2}\ln(\sin^2(x)+4) + C,\ x \neq k\pi.$$

9. $\displaystyle\int \frac{\cosh(x)}{\sqrt{1-\sinh^2(x)}}\,dx = \left|\begin{array}{c} y = \sinh(x) \\ dy = \cosh(x)\,dx \end{array}\right| = \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin(y) + C$

$$= \arcsin(\sinh(x)) + C.$$

10. Nejprve neurčitý: $\displaystyle\int \ln(2x)\frac{1}{x^2}\,dx = \left|\begin{array}{ll} f = \ln(2x) & g' = x^{-2} \\ f' = \frac{1}{2x}\cdot 2 & g = -x^{-1} \end{array}\right|$

$$= \ln(2x)\frac{-1}{x} - \int -x^{-2}\,dx = \ln(2x)\frac{-1}{x} - \frac{1}{x} + C = -\frac{\ln(2x)+1}{x} + C,\ x > 0.$$

Proto $\displaystyle\int_1^\infty \ln(2x)\frac{1}{x^2}\,dx = \Big[-\frac{\ln(2x)+1}{x}\Big]_1^\infty = \lim_{x\to\infty}\Big(-\frac{\ln(2x)+1}{x}\Big) + \ln(2) + 1$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{l'H}}{=}} \lim_{x\to\infty}\Big(-\frac{2}{2x}\Big) + \ln(2) + 1 = 0 + \ln(2) + 1 = \ln(2) + 1.$$

11. $\displaystyle z = \frac{(3-i)(3+i)}{(1+i)(3+i)-2i} = \frac{4}{2+2i} = \frac{4(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} = \frac{8-8i}{8} = 1-i = \sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}i}.$

12. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & a^2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a^2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -a & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^2-1 \end{array}\right).$

Poslední řádek dává rovnici $0 = a^2 - 1$. Pro $a \neq \pm 1$ tedy řešení neexistuje.

Dále předpokládejme $a = \pm 1$, máme $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -a & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right)$.

Čtvrtý řádek rozhodne o tom, zda je hodnost matice rovna 4 nebo méně.

Pokud $a = -1$, tak vyjde matice $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$ s hodností 4, což je rovno počtu neznámých a bude proto jediné řešení.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_4 &= 1 \\ x_2 + x_4 &= -1 \\ x_3 + x_4 &= 1 \\ -2x_4 &= 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad x_4 = 0,\ x_3 = 1,\ x_2 = -1,\ x_1 = 1.$$

Zbývá případ $a = 1$, matice $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ má hodnost tři, bude tedy řešení s jedním parametrem, dle tvaru matice pro poslední proměnnou.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_4 &= 1 \\ x_2 - x_4 &= -1 \\ x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad x_4 = t,\ x_3 = 1 - t,\ x_2 = t - 1,\ x_1 = 1 - 2t.$$

Vychází řešení $(1-2t, t-1, 1-t, t)$ neboli $(1,-1,1,0) + t(-2,1,-1,1)$, $t \in I\!R$.

13. a) Nechť $f, g \in W$, $\alpha \in I\!R$. Dle definice W jsou funkce f, g definované na $I\!R$, proto je i funkce $\alpha f + g$ definovaná na $I\!R$, jinými slovy $(\alpha f + g) \in W$. Množina W je tedy lineárním podprostorem vektorového prostoru, proto je W vektorový prostor.

b) Nechť $f, g \in V$, $\alpha \in I\!R$. Dle definice V jsou funkce f, g definované a diferencovatelné na $I\!R$, podle vět z analýzy je tedy i funkce $\alpha f + g$ definovaná a diferencovatelná na $I\!R$, jinými slovy $(\alpha f + g) \in V$. Množina V je tedy lineárním podprostorem vektorového prostoru, proto je V vektorový prostor.

c) Nechť $f, g \in V$, $\alpha \in I\!R$. Pak

$L(\alpha f + g) = [\alpha f + g]' = \alpha f' + g' = \alpha L(f) + L(g)$.

Zobrazení L je tedy lineární.

Jádro: $\mathrm{Ker}(L) = \{f \in W;\ L(f) = 0\} = \{f \in W;\ f' = 0\}$. Zde „0“ značí nulu v prostoru W, tedy nulovou funkci. Podle vět z analýzy jsou to přesně konstantní funkce, které mají derivaci identicky rovnou nule. Proto

$$\mathrm{Ker}(L) = \{f \in W;\ \exists c \in I\!R\, \forall x \in I\!R:\ f(x) = 0\} = \{c;\ c \in I\!R\}.$$