Matematický seminář: Pracovní list # 10

Příklady vypracujte samostatně, výsledky se dozvíte na konci hodiny. Zaměřte se hlavně na témata, která vás nejvíce pálí.
V případě problémů se přihlaste, vyučující vám pomůže.

1. Pro kterou hodnotu parametru a bude mít funkce $f(x) = e^x + \sqrt{2x - a}$ definiční obor $D(f) = \langle 11, \infty)$?

2. Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x + 5x^2}{x^2 - \ln(-x)} \right)$.

3. Jakou hodnotu musí mít parametr p, aby limita $\lim\limits_{x \to 4} \left(\dfrac{\ln(x-3)}{5x - 1 - p} \right)$ vyšla $\frac{1}{5}$?

4. Najděte derivaci funkce $f(x) = \sqrt{4 + \sin\big(\ln(x)\big)} + 3$ v bodě $x = 1$.

5. Pro funkci $f(x) = 12e^{x^2 - 2|x|}$ určete maximální intervaly monotonie a lokální extrémy. Kolik je hodnota funkce v lokálním maximu?

6. Které reálné číslo má tu vlastnost, že když jej vynásobíte číslem o deset menším, tak dostanete nejmenší možný výsledek, který lze tímto způsobem získat?

7. Vypočítejte integrál $\displaystyle\int\limits_0^1 12x(x^2+1)^5 - 41\, dx$.

8. Vypočítejte integrál $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{1}{\pi} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.

9. Vypočítejte integrál $\displaystyle\int\limits_0^1 \pi(2x+6)\sin(\pi x)\, dx$.

10. Pro kterou hodnotu parametru b bude mít komplexní číslo $bi - 15$ exponenciální tvar $r\, e^{\frac{3}{4}\pi i}$?

11. Uvažujte racionální lomenou funkci $\dfrac{3x^4 + 4x^2 + 11}{(x-2)^3(x^2+1)^2}$. Napište, jak vypadá obecně její rozklad na parciální zlomky, a pak určete ty konstanty, které lze získat pomocí zakrývací metody.

12. Homogenní soustava lineárních rovnic je dána maticí $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & 3 \\ 1 & -a & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & -7 \end{pmatrix}$.

Pro kterou hodnotu parametru a má tato soustava nekonečně mnoho řešení?

13. Každý příklad výše měl alespoň jednu (pod)otázku, na kterou se odpovědělo číslem. Vepište tato čísla po řadě do prvního řádku následující tabulky, poté pod ně připište odpovídající písmena anglické abecedy.

Matematický seminář: Pracovní list # 10 řešení

1. Chceme, aby $x = 11$ jako nejmenší řešilo $2x - a \geq 0$, tedy $22 - a = 0$, tedy $a = 22$.

2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+5x^2}{x^2-\ln(-x)}\right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1+10x}{2x-\frac{1}{x}}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\frac{1}{x}+10}{2-\frac{1}{x^2}}\right) = 5.$

3. Dosazení $a = 4$ dává $\dfrac{\ln(1)}{19-p} = \dfrac{0}{19-p}$. Jediná šance na nenulový výsledek je, aby byla nula i ve jmenovateli, tedy $p = 19$. Kontrola: Pak je

$\lim\limits_{x\to4}\left(\dfrac{\ln(x-3)}{5x-20}\right) \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} \lim\limits_{x\to4}\left(\dfrac{\frac{1}{x-3}}{5}\right) = \frac{1}{5}.$

4. $f'(x) = \dfrac{8}{2\sqrt{4+\sin\bigl(\ln(x)\bigr)}} \cdot \left[0 + \cos\bigl(\ln(x)\bigr)\frac{1}{x}\right] + 3$, $f'(1) = 5$.

5. $f(x) = \begin{cases} 12e^{x^2-2x}, & x \geq 0; \\ 12e^{x^2+2x}, & x < 0, \end{cases}$ proto $f'(x) = \begin{cases} 12(2x-2)e^{x^2-2x}, & x > 0; \\ 12(2x+2)e^{x^2+2x}, & x < 0. \end{cases}$

	$(-\infty,-1\rangle$	$\langle -1, 0\rangle$	$\langle 0, 1\rangle$	$\langle 1, \infty)$
$2x-2$:	/////	/////	$-$	$+$
e^{x^2-2x} :	/////	/////	$+$	$+$
$2x+2$:	$-$	$+$	/////	/////
e^{x^2+2x} :	$+$	$+$	/////	/////
$f'(x)$:	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$:	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Lok. max $f(0) = 12$. Lok. minima jsou $f(\pm1) = 12\,e^{-1}$.
Hodnota funkce v lokálním maximu je 12.

6. Které reálné číslo minimalizuje funkci $f(x) = x(x-10)$?
$f'(x) = 2x - 10$, je to číslo $x = 5$.

7. $$\int_0^1 12x(x^2+1)^5 - 41\,dx = \left|\begin{array}{c} y = x^2+1 \\ dy = 2x\,dx \\ 6dy = 12x\,dx \\ x = 1 \implies y = 2 \\ x = 0 \implies y = 1 \end{array}\right| = \int_1^2 6y^5 - 41\,dy$$

$$= \Big[y^6 - 41y\Big]_1^2 = 22.$$

8. $$\int_1^\infty \frac{1}{\pi}\frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \left|\begin{array}{c} x - 1 = t^2 \\ dx = 2t\,dt \\ x = \infty \implies t = \infty \\ x = 1 \implies y = 0 \end{array}\right| = \int_0^\infty \frac{1}{\pi}\frac{2t\,dt}{(t^2+1)\sqrt{t^2}} = \int_0^\infty \frac{1}{\pi}\frac{2\,dt}{t^2+1}$$

$$= \Big[\tfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(y)\Big]_0^\infty = 1.$$

9. $$\int_0^1 \pi(2x+6)\sin(\pi x)\,dx = \left|\begin{array}{ll} f = 2x+6 & g' = \pi\sin(\pi x) \\ f' = 2 & g = -\cos(\pi x) \end{array}\right|$$

$$= \Big[-(2x+6)\cos(\pi x)\Big]_0^1 - \int_0^1 -2\cos(\pi x)\,dx$$

$$= 14 + \Big[\tfrac{2}{\pi}\sin(\pi x)\Big]_0^1 = 14 + 0 - 0 = 14.$$

10. Je třeba mít úhel $\frac{3}{4}\pi$, což nastane přesně tehdy, když je reálná část záporná, imaginární kladná a mají stejnou velikost. Proto $b = 15$.

11. $\dfrac{3x^4+4x^2+11}{(x-2)^3(x^2+1)^2} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{(x-2)^2} + \dfrac{C}{(x-2)^3} + \dfrac{Dx+E}{x^2+1} + \dfrac{Fx+G}{(x^2+1)^2}.$

$C = \left.\dfrac{3x^4+4x^2+11}{(///)(x^2+1)^2}\right|_{x=2} = \dfrac{75}{25} = 3.$

12. Aby bylo nekonečně mnoho řešení, musí být hodnost matice menší než 4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & 3 \\ 1 & -a & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & 3 \\ 0 & -a & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jediná šance na nulový řádek je, aby se třetí rovnal mínus druhému, což nastane pro $a = 5$.