

## Řady funkcí

### 0. Opakování: Reálné řady

#### Definice.

**Řada** je symbol  $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k = a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \dots$ , kde  $n_0 \in \mathbb{Z}$ ,  $a_k \in \mathbb{R}$  (reálná řada).

#### Definice.

Nechť  $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$  je řada.

Definujeme její **částečné součty** jako  $s_N = \sum_{k=n_0}^N a_k$  pro  $N \geq n_0$ .

Řekneme, že daná řada **konverguje**, jestliže  $\{s_N\}_{N=n_0}^{\infty}$  konverguje.

Řekneme, že daná řada **konverguje k**  $A$ , značíme  $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k = A$ , jestliže  $\lim_{N \rightarrow \infty} (s_N) = A$ .

Řekneme, že daná řada **diverguje**, jestliže  $\{s_N\}_{N=n_0}^{\infty}$  diverguje.

Řekneme, že daná řada **diverguje k**  $\infty$ , značíme  $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k = \infty$ , jestliže  $\lim_{N \rightarrow \infty} (s_N) = \infty$ .

Řekneme, že daná řada **diverguje k**  $-\infty$ , značíme  $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k = -\infty$ , jestliže  $\lim_{N \rightarrow \infty} (s_N) = -\infty$ .

#### Příklad.

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ :  $s_1 = \frac{1}{2}$ ,  $s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ ,  $s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ , indukce:  $s_N = 1 - \frac{1}{2^N}$ , proto  $s_N \rightarrow 1$  a  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$  (řada konverguje).

#### Příklad.

$\sum_{k=1}^{\infty} 1$ :  $s_1 = 1$ ,  $s_2 = 1 + 1 = 2$ ,  $s_3 = 1 + 1 + 1 = 3$ , indukce:  $s_N = N$ , proto  $s_N \rightarrow \infty$  a  $\sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty$  (řada diverguje).

#### Příklad.

$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ :  $s_0 = 1$ ,  $s_1 = 1 - 1 = 0$ ,  $s_2 = 1 - 1 + 1 = 1$ , indukce:  $s_N = \begin{cases} 1, & N \text{ sudé;} \\ 0, & N \text{ liché,} \end{cases}$  proto  $\lim_{N \rightarrow \infty} (s_N)$  neex. a  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$  diverguje.

### 0.1. Sčítání řad

#### Definice.

Nechť  $a, q \in \mathbb{R}$ . Řada  $\sum_{k=n_0}^{\infty} a q^k$  se nazývá **geometrická řada**.

#### Fakt.

- (i) Pro  $N \in \mathbb{N}_0$  platí  $\sum_{k=0}^N q^k = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$ .
- (ii) Máme  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k \begin{cases} = \frac{1}{1-q}, & |q| < 1; \\ = \infty \text{ (diverguje),} & q \geq 1; \\ \text{diverguje,} & q \leq -1. \end{cases}$

Sčítání řad: umíme přímo sečíst dva druhy:

1) geometrická řada (případně v převleku):

**Příklad.**

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{5 \cdot 3^{k-1}}{2^{2k+1}} &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{5 \cdot 3^{-1} \cdot 3^k}{2^1 \cdot (2^2)^k} = \frac{5}{6} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{3^k}{4^k} = \frac{5}{6} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{5}{6} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k \\ &= \left\langle \left| \frac{3}{4} \right| < 1 \right\rangle = \frac{5}{6} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = \frac{15}{8}. \end{aligned}$$

Poznámka: Obecně pro geometrickou  $\sum_{k=n_0}^{\infty} q^k = q^{n_0} \sum_{k=0}^{\infty} q^k$ .

Nebo substitute:  $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k = \left| \begin{array}{l} n = k - 2 \implies k = n + 2 \\ 2 \mapsto 0, \infty \mapsto \infty \end{array} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+2} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ .

Ta se dá použít pro všechny řady, občas značím  $|k - 2 \mapsto k^*|$ .

2) teleskopická řada (případně v převleku):

**Příklad.**

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots$$

Indukce:  $s_N = \frac{1}{2} - \frac{1}{N} \rightarrow \frac{1}{2}$ , proto  $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{2}$ .

Poznámka: vzorce pro konečné sumy:

$$\sum_{k=1}^n 1 = n, \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1), \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \text{ atd.}$$

**Věta.**

Nechť řady  $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ ,  $\sum_{k=n_0}^{\infty} b_k$  konvergují.

Pak konverguje i  $\sum_{k=n_0}^{\infty} (a_k + b_k)$  a  $\sum_{k=n_0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k + \sum_{k=n_0}^{\infty} b_k$ .

Pro  $c \in \mathbb{R}$  konverguje i  $\sum_{k=n_0}^{\infty} (c a_k)$  a  $\sum_{k=n_0}^{\infty} (c a_k) = c \left( \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k \right)$ .

## 0.2. Konvergence řad

**Věta.**

Nechť  $n_0 < n_1$ , uvažujme řadu  $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ .  $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$  konverguje právě tehdy, když  $\sum_{k=n_1}^{\infty} a_k$  konverguje.

Navíc pak platí  $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k = \sum_{k=n_0}^{n_1-1} a_k + \sum_{k=n_1}^{\infty} a_k$ .

Pokud nás zajímá jen konvergence řasy a ne její konkrétní (případný) součet, vynecháváme specifikaci indexu.

**Věta.** (**nutná podmínka** konvergence)

Jestliže řada  $\sum a_k$  konverguje, pak nutně  $\lim_{k \rightarrow \infty} (a_k) = 0$ .

Ekvivalentně: Jestliže neplatí  $\lim_{k \rightarrow \infty} (a_k) = 0$ , pak řada  $\sum a_k$  nutně diverguje.

**Věta.**

Uvažujme řadu  $\sum a_k$ . Jestliže  $a_k \geq 0$  pro všechna  $k$ , pak buď  $\sum a_k$  konverguje, nebo  $\sum a_k = \infty$ .

### 0.2.1. Testy pro řady s nezápornými členy

#### Věta. (integrální kritérium)

Nechť  $f \geq 0$  je nerostoucí na  $\langle n_0, \infty \rangle$  pro  $n_0 \in \mathbb{Z}$ .

Řada  $\sum_{k=n_0}^{\infty} f(k)$  konverguje právě tehdy, když  $\int_{n_0}^{\infty} f(x) dx$  konverguje.

Navíc pak platí  $\int_{n_0}^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} f(k) \leq f(n_0) + \int_{n_0}^{\infty} f(x) dx$ .

#### Příklad.

$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2(k)}$ :  $\int_{x=3}^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2(x)} = \left| \begin{matrix} y = \ln(x) \\ dy = \frac{dx}{x} \end{matrix} \right| = \int_{x=\ln(3)}^{\infty} \frac{dy}{y^2} < \infty$ . Proto řada konverguje.

Také  $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2(k)} \in \langle \frac{1}{\ln(3)}, \frac{1}{3 \ln^2(3)} + \frac{1}{\ln(3)} \rangle \sim \langle 0.91, 1.19 \rangle$ .

Trik:  $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2(k)} = \sum_{k=3}^9 \frac{1}{k \ln^2(k)} + \sum_{k=10}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2(k)}$   
 $\in \left[ \sum_{k=3}^9 \frac{1}{k \ln^2(k)} + \int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2(x)}, \sum_{k=3}^9 \frac{1}{k \ln^2(k)} + \frac{1}{10 \ln^2(10)} + \int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2(x)} \right] \sim [1.059, 1.078]$ .

#### Důsledek. ( $p$ -test)

$\sum \frac{1}{k^p}$  konverguje právě tehdy, když  $p > 1$ .

#### Příklad.

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$  (**harmonická řada**).

#### Věta. (srovnávací test)

Nechť  $\exists n_0$  tak, aby  $0 \leq a_k \leq b_k$  pro  $k \geq n_0$ .

Jestliže  $\sum b_k$  konverguje, pak také  $\sum a_k$  konverguje.

Jestliže  $\sum a_k$  diverguje, pak také  $\sum b_k$  diverguje (tj.  $\sum a_k = \infty \implies \sum b_k = \infty$ ).

Poznámka: symbolicky (a zhruba)  $a_k \leq b_k \implies \sum a_k \leq \sum b_k$ .

#### Věta. (limitní srovnávací test)

Nechť  $\exists n_0 \in \mathbb{Z}$  tak, aby  $a_k \geq 0, b_k \geq 0$  pro  $k \geq n_0$ .

Jestliže  $a_k \sim b_k$ , tj.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{a_k}{b_k} \right) = A > 0$ , pak  $\sum a_k \sim \sum b_k$ , tj.  $\sum a_k$  konverguje právě tehdy, když konverguje  $\sum b_k$ .

#### Příklad.

$\sum \frac{1}{k^2+1}$ :  $0 \leq \frac{1}{k^2+1} \leq \frac{1}{k^2}$  a  $\sum \frac{1}{k^2}$  konverguje, proto dle ST i  $\sum \frac{1}{k^2+1}$  konverguje.

Poznámka: řel by i integrální test a limitní srovnávací test.

#### Příklad.

$\sum \frac{1}{2k^2-1}$ :  $\frac{1}{2k^2-1} \geq \frac{1}{2k^2} \geq 0$ ,  $\sum \frac{1}{2k^2} = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{k^2}$  konverguje, ale nerovnost jde špatným směrem, proto žádný závěr.

Odhad  $\frac{1}{2k^2-1} \sim \frac{1}{2k^2}$  pro  $k$  velké, potvrdíme:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{1}{2k^2-1}}{\frac{1}{2k^2}} \right) = 1 > 0$ ,

$\sum \frac{1}{2k^2} = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{k^2}$  konverguje, proto dle LST i  $\sum \frac{1}{2k^2-1}$  konverguje.

**Příklad.**

$\sum \frac{1}{k \ln^2(k)}$ : Nabízí se dvě srovnání,  $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k \ln^2(k)} \leq \frac{1}{k}$ , ale obě vedou špatným směrem, proto nic. Limitní srovnání: Není kandidát, rozhodně neplatí  $\frac{1}{k \ln^2(k)} \sim \frac{1}{k}$  nebo  $\frac{1}{k \ln^2(k)} \sim \frac{1}{k^2}$ . Srovnávací testy tedy nepomohou.

**Věta.**

Nechť  $a_k \geq 0$  pro všechna  $k$ .

**podílové kritérium:**

(i) Jestliže  $\exists q < 1$  a  $\exists n_0 \in \mathbb{Z}$  splňující  $\forall k \geq n_0: \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q$ , pak  $\sum a_k$  konverguje.

(ii) Jestliže  $\exists n_0 \in \mathbb{Z}$  splňující  $\forall k \geq n_0: \frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$ , pak  $\sum a_k$  diverguje ( $= \infty$ ).

**limitní podílové kritérium:** Nechť  $\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{a_{k+1}}{a_k} \right)$ , pokud limita konverguje.

(i) Jestliže  $\lambda < 1$ , pak  $\sum a_k$  konverguje.

(ii) Jestliže  $\lambda > 1$ , pak  $\sum a_k$  diverguje ( $= \infty$ ).

**odmocninové kritérium:**

(i) Jestliže  $\exists q < 1$  a  $\exists n_0 \in \mathbb{Z}$  splňující  $\forall k \geq n_0: \sqrt[k]{a_k} \leq q$ , pak  $\sum a_k$  konverguje.

(ii) Jestliže  $\exists n_0 \in \mathbb{Z}$  splňující  $\forall k \geq n_0: \sqrt[k]{a_k} \geq 1$ , pak  $\sum a_k$  diverguje ( $= \infty$ ).

**limitní odmocninové kritérium:** Nechť  $\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sqrt[k]{a_k} \right)$ , pokud limita konverguje.

(i) Jestliže  $\rho < 1$ , pak  $\sum a_k$  konverguje.

(ii) Jestliže  $\rho > 1$ , pak  $\sum a_k$  diverguje ( $= \infty$ ).

**Příklad.**

$\sum \frac{k!}{2^k}$ : Limitní podílový test  $\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{a_{k+1}}{a_k} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{(k+1)!}{k!} \frac{2^k}{2^{k+1}} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} (k+1) \right) = \infty > 1$ .

Proto  $\sum \frac{k!}{2^k}$  diverguje.

**Příklad.**

$\sum \frac{2}{\ln^k(k+1)}$ : Limitní odmocninový test  $\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sqrt[k]{a_k} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt[k]{2}}{\ln(k+1)} \right) = \frac{1}{\infty} = 0 < 1$ .

Proto  $\sum \frac{2}{\ln^k(k+1)}$  konverguje.

**Příklad.**

$\sum \left( \frac{k}{k+1} \right)^k$ : Limitní odmocninový test  $\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sqrt[k]{a_k} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{k}{k+1} \right) = 1$ , není žádný závěr.

Podobně limitní podílový. Integrální test bez šance, srovnání taky.

Ale:  $a_k = \left( 1 - \frac{1}{k+1} \right)^k \rightarrow e^{-1} \neq 0$ , proto  $\sum \left( \frac{k}{k+1} \right)^k$  diverguje.

**0.2.2. Testy pro alternující řady****Věta. (Leibnizovo kritérium)**

Nechť  $b_k \geq 0$  pro všechna  $k$  a  $\{b_k\}$  je nerostoucí.

Řada  $\sum (-1)^k b_k$  konverguje právě tehdy, když  $\lim_{k \rightarrow \infty} (b_k) = 0$ .

**Příklad.**

$\sum \frac{(-1)^k}{k}$ :  $b_k = \frac{1}{k} \geq 0$  je klesající a  $\rightarrow 0$ , proto  $\sum \frac{(-1)^k}{k}$  konverguje (srovnej s harmonickou řadou).

**0.3. Absolutní konvergence řad****Definice.**

Řada  $\sum a_k$  konverguje absolutně, jestliže konverguje řada  $\sum |a_k|$ .

**Věta.**

Jestliže řada  $\sum a_k$  konverguje absolutně, pak také konverguje a platí  $\left| \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k|$ .

Ale ne naopak! Viz  $\sum \frac{(-1)^k}{k}$  konverguje, ale  $\sum \left| \frac{(-1)^k}{k} \right| = \sum \frac{1}{k} = \infty$ .

**Definice.**

Řekneme, že daná řada **konverguje neabsolutně** (také **konverguje podmíněčně**), jestliže konverguje, ale nekonverguje absolutně.

Takže tři možnosti:

—  $\sum a_k$  konverguje,  $\sum |a_k|$  konverguje: absolutní konvergence (ta druhá už implikuje tu první)

—  $\sum a_k$  konverguje,  $\sum |a_k|$  diverguje: neabsolutní konvergence

—  $\sum a_k$  diverguje,  $\sum |a_k|$  diverguje (ta první už implikuje tu druhou)

**Příklad.**

neabsolutní konvergence:  $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ ; absolutní konvergence:  $\sum \frac{(-1)^k}{k^2}$ ; divergence:  $\sum (-1)^k$ .

**Příklad.**

$\sum \frac{\sin(k)}{2^k}$ : Tuto řadu bychom neuměli prozkoumat přímo. Členy nejsou nezáporné, proto testy nefungují. Nemůžeme použít Leibnize, protože to není řada alternující. Nepomůže ani nutná podmínka, protože  $a_k \rightarrow 0$ .

Zkusíme tedy absolutní konvergenci a doufáme, že to vyjde kladně, ať máme nějaký závěr:

$\sum \left| \frac{\sin(k)}{2^k} \right| = \sum \frac{|\sin(k)|}{2^k} \leq \sum \frac{1}{2^k}$ , tohle konverguje, proto podle srovnávacího testu konverguje i  $\sum \left| \frac{\sin(k)}{2^k} \right|$ , tedy  $\sum \frac{\sin(k)}{2^k}$  konverguje absolutně.

**Příklad.**

$\sum (-1)^k \frac{2^k}{k^3}$ : absolutní:  $\sum \left| (-1)^k \frac{2^k}{k^3} \right| = \sum \frac{2^k}{k^3}$ , podílové kritérium:  $\frac{a_{k+1}}{a_k} = 2 \left( \frac{k}{k+1} \right)^3 \rightarrow 2 = \lambda > 1$ , proto  $\sum \left| (-1)^k \frac{2^k}{k^3} \right|$  diverguje, takže  $\sum (-1)^k \frac{2^k}{k^3}$  nekonverguje absolutně. Nevíme ale, jestli náhodou nekonverguje, pak by konvergovala podmíněně.

Jenže  $\frac{2^k}{k^3} \rightarrow \infty$ , proto  $a_k = (-1)^k \frac{2^k}{k^3} \not\rightarrow 0$ , takže řada diverguje.

**Věta.**

Uvažujme řadu  $\sum_{k=2n_0}^{\infty} a_k$ .

Jestliže  $\sum a_k$  konverguje absolutně, pak konvergují i  $\sum a_{2k}$  a  $\sum a_{2k+1}$  a

$$\sum_{k=2n_0}^{\infty} a_k = \sum_{k=n_0}^{\infty} a_{2k} + \sum_{k=n_0}^{\infty} a_{2k+1}.$$

Neplatí pro neabsolutní konvergenci, viz  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ .

**Věta.**

Uvažujme řadu  $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ .

Jestliže  $\sum a_k$  konverguje absolutně, pak pro každou volbu znamének  $\varepsilon_k = \pm 1$  konverguje i  $\sum \varepsilon_k a_k$ .

Jestliže  $\sum a_k$  konverguje neabsolutně, pak existuje volba znamének  $\varepsilon_k = \pm 1$ , aby  $\sum \varepsilon_k a_k = \infty$ .

**Definice.**

Uvažujme řadu  $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ .

**Přerovnění**  $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$  je řada  $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_{\pi(k)}$ , kde  $\pi$  je libovolná permutace  $\{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots\}$ , tj. bijekce  $\{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots\} \subset \mathbb{Z}$  na  $\{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots\}$ .

**Věta.**

Uvažujme řadu  $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ .

Jestliže  $\sum a_k$  konverguje absolutně, pak konvergují i všechna její přerovnění  $\sum a_{\pi(k)}$  a platí

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} a_{\pi(k)} = \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k.$$

Jestliže  $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$  konverguje neabsolutně, pak  $\forall c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  existuje její přerovnění takové, že

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} a_{\pi(k)} = c.$$

**Řady v komplexním oboru.**

Teorie je obdobná, což plyne z následujícího.

**Věta.**

Nechť  $a_k$  jsou komplexní čísla.

Pak  $a_k \rightarrow A$  právě tehdy když  $\operatorname{Re}(a_k) \rightarrow \operatorname{Re}(A)$  a  $\operatorname{Im}(a_k) \rightarrow \operatorname{Im}(A)$ .

Podobně řada  $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$  konverguje právě tehdy, když konvergují  $\sum_{k=n_0}^{\infty} \operatorname{Re}(a_k)$  a  $\sum_{k=n_0}^{\infty} \operatorname{Im}(a_k)$ .

Pak také  $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k = \left( \sum_{k=n_0}^{\infty} \operatorname{Re}(a_k) \right) + j \left( \sum_{k=n_0}^{\infty} \operatorname{Im}(a_k) \right)$ .

Takto se dostaneme k běžné konvergenci. Výrazně silnou zbraní je v komplexním oboru pojem absolutní konvergence, který umožňuje přejít od řad komplexních k řadám s nezápornými členy, přičemž je zase silnější než obyčejná konvergence.

## 1. Posloupnosti a řady funkcí

### Definice.

**Posloupnost funkcí** je uspořádaná množina  $\{f_k\}_{k=n_0}^{\infty} = \{f_{n_0}, f_{n_0+1}, f_{n_0+2}, \dots\}$ , kde  $f_k$  jsou funkce.

Poznámka: Je-li dána posloupnost funkcí  $\{f_k\}_{k=n_0}^{\infty}$  a  $x \in \bigcap D(f_k)$ , pak  $\{f_k(x)\}$  je standardní posloupnost reálných (komplexních) čísel.

### Definice.

Nechť  $\{f_k\}_{k \geq n_0}$ ,  $f$  jsou funkce na množině  $M$ .

Řekneme, že  $\{f_k\}$  **konverguje (bodově)** k  $f$  na  $M$ , značeno  $f_k \rightarrow f$  nebo  $f = \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k)$ , jestliže  $\forall x \in M: \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k(x)) = f(x)$ .

### Příklad.

Uvažujme  $f_k(x) = \arctg(kx)$ . Pak  $\lim_{k \rightarrow \infty} (f_k(x)) = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ \frac{\pi}{2}, & x > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0. \end{cases}$

### Definice.

Nechť  $\{f_k\}_{k \geq n_0}$ ,  $f$  jsou funkce na množině  $M$ .

Řekneme, že  $\{f_k\}$  **konverguje stejnoměrně** k  $f$  na  $M$ , značeno  $f_k \rightrightarrows f$ , jestliže  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N}$  takové, že  $\forall k \geq N_0 \forall x \in M: |f(x) - f_k(x)| < \varepsilon$ .

### Věta.

Nechť  $f_k \rightrightarrows f$  na  $M$ .

(i) Jsou-li  $f_k$  spojité na  $M$ , pak je tam spojitá také  $f$ .

(ii) Mají-li  $f_k$  derivaci na  $M$ , pak ji tam má také  $f$  a  $f' = \lim_{k \rightarrow \infty} (f'_k)$  na  $M$ .

(iii) Mají-li  $f_k$  primitivní funkci na  $M$ , má ji tam také  $f$  a  $\int_a^x f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} (\int_a^x f_k dx)$  pro  $\overline{a, x} \subseteq M$ .

### Definice.

**Funkční řada** je symbol  $\sum_{k=n_0}^{\infty} f_k = f_{n_0} + f_{n_0+1} + f_{n_0+2} + \dots$ , kde  $f_k$  jsou funkce.

Poznámka: Je-li dána funkční řada  $\sum f_k$  a  $x \in \bigcap D(f_k)$ , pak  $\sum f_k(x)$  je standardní řada reálných (komplexních) čísel.

### Definice.

Uvažujme funkční řadu  $\sum_{k=n_0}^{\infty} f_k$ .

**Obor konvergence** této řady je množina  $\{x \in \bigcap D(f_k); \sum f_k(x) \text{ konverguje}\}$ . Definicí

$f(x) = \sum_{k=n_0}^{\infty} f_k(x)$  tak vzniká funkce  $f$  na  $M$  zvaná **součet řady**, značíme  $\sum_{k=n_0}^{\infty} f_k = f$ .

**Obor absolutní konvergence** této řady je množina  $\{x \in \bigcap D(f_k); \sum f_k(x) \text{ konv. absolutně}\}$ . Řekneme, že tato řada **konverguje stejnoměrně** k  $f$  na  $M$ , značeno  $\sum f_k \rightrightarrows f$  na  $M$ , jestliže

posloupnost částečných součtů  $\left\{ \sum_{k=n_0}^N f_k(x) \right\}$  konverguje stejnoměrně k  $f$  na  $M$ .

**Věta.**

Uvažujme řady funkcí  $\sum f_k$  a  $\sum g_k$ .

Jestliže  $\sum_{k=n_0}^{\infty} f_k = f$  na  $M$  a  $\sum_{k=n_0}^{\infty} g_k = g$  na  $M$ , pak  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ :  $\sum_{k=n_0}^{\infty} (af_k + bg_k) = af + bg$  na  $M$ .

Totéž platí pro stejnoměrnou konvergenci.

**Věta.** (Weierstrassovo kritérium)

Nechť  $f_k$  pro  $k \geq n_0$  jsou funkce na  $M$ . Nechť  $a_k \geq 0$  splňují  $\forall x \in M \forall k \geq n_0: |f_k(x)| \leq a_k$ .

Jestliže  $\sum a_k$  konverguje, pak  $\sum f_k$  konverguje stejnoměrně na  $M$ .

**Příklad.**

$\sum x^k = \frac{1}{1-x}$  na  $(-1, 1)$ , ale konvergence není stejnoměrná. Bude stejnoměrná, pokud se omezíme na  $\langle -\varrho, \varrho \rangle$  pro  $\varrho \in (0, 1)$ .

**Věta.**

Nechť  $\sum f_k \rightrightarrows f$  na  $M$ .

(i) Jsou-li všechny  $f_k$  spojité na  $M$ , pak je tam spojitá také  $f$ .

(ii) Mají-li všechny  $f_k$  derivaci na  $M$ , pak ji tam má také  $f$  a  $f' = \sum_{k=n_0}^{\infty} f'_k$  na  $M$ .

(iii) Mají-li všechny  $f_k$  primitivní funkci na  $M$ , pak ji tam má také  $f$  a  $\int_a^x f dx = \sum_{k=n_0}^{\infty} \int_a^x f_k dx$   
pro  $\overline{a, x} \subseteq M$ .

Nic z toho neplatí obecně pro obyčejnou (bodovou) konvergenci.



## 2. Mocninné řady

### Definice.

Nechť  $z_0 \in \mathbb{R}$ .

**Mocninná řada se středem v bodě  $a$**  je funkční řada  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ , kde  $a_k \in \mathbb{R}$ .

### Věta.

Uvažujme mocninnou řadu  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ .

Existuje  $r \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$  takové, že  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$  konverguje absolutně na  $U_r(a) = (a-r, a+r)$

a diverguje pro  $|x-a| > r$ . Navíc platí  $r = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} (\sqrt[k]{|a_k|})}$ .

Poznámka: Také máme  $r = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \right)}$ , pokud tato limita existuje.

Poznámka: Řada vždy konverguje (absolutně) v  $x = a$ .

### Definice.

Uvažujme mocninnou řadu  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ .

Číslo  $r$  s vlastnostmi z předchozí věty se nazývá **poloměr konvergence** této řady.

### Příklad.

$\sum \frac{(2x)^k}{k 3^k} = \sum \frac{2^k}{k 3^k} (x-0)^k$ , proto  $a = 0$ .

Absolutní konvergence limitním odmocninovým testem:  $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{2|x|}{3\sqrt[k]{k}} \rightarrow \frac{2|x|}{3} = \varrho$ .

$\varrho < 1 \iff \frac{2|x|}{3} < 1 \iff |x| < \frac{3}{2}$ , proto poloměr konvergence  $r = \frac{3}{2}$ . Krajní body  $a \pm r = \pm \frac{3}{2}$ :  
 $x = \frac{3}{2}$ :  $\sum \frac{1}{k} = \infty$ .

$x = -\frac{3}{2}$ :  $\sum \frac{(-1)^k}{k}$  konverguje.

Obor konvergence  $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ , obor absolutní konvergence  $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ .

### Příklad.

$\sum \frac{(2x-4)^k}{k!} = \sum \frac{2^k}{k!} (x-2)^k$ , proto  $a = 2$ .

Absolutní konvergence limitním podílovým testem:  $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{2}{k+1} |x-2| \rightarrow 0 = \lambda$ .

$\lambda < 1$  je pravda  $\forall x$ , proto poloměr konvergence  $r = \infty$ .

Obor konvergence a obor absolutní konvergence  $\mathbb{R}$ .

### Příklad.

$\sum k^k (2x+3)^k = \sum k^k 2^k \left(x - \left(-\frac{3}{2}\right)\right)^k$ , proto  $a = -\frac{3}{2}$ .

Absolutní konvergence limitním odmocninovým testem:

$\sqrt[k]{|a_k|} = 2k \left|x + \frac{3}{2}\right| \rightarrow \begin{cases} \infty, & x \neq -\frac{3}{2}; \\ 0, & x = -\frac{3}{2} \end{cases} = \varrho$ .

$\varrho < 1 \iff x = -\frac{3}{2}$ , proto poloměr konvergence  $r = 0$ .

Obor konvergence a obor absolutní konvergence  $\left\{-\frac{3}{2}\right\}$ .

**Věta.**

Nechť  $a \in \mathbb{R}$ , nechť  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k = f$ ,  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-a)^k = g$  mají pol. konvergence  $r_f$  a  $r_g$ .

(i) Pak  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ :  $\sum_{k=0}^{\infty} (aa_k + bb_k)(x-a)^k = af + bg$  má poloměr konvergence  $r = \min(r_f, r_g)$ .

(ii) Řada  $\sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \right) (x-a)^k = \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-a)^k \right) = f \cdot g$  má poloměr konvergence  $r = \min(r_f, r_g)$ .

**Věta.**

Nechť  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k = f$  má poloměr konvergence  $r > 0$ .

(i) Pro libovolné  $\varrho \in (0, r)$ :  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k \xrightarrow{\varrho} f$  na  $U_{\varrho}(a)$ .

(ii)  $f$  je spojitá, má derivaci  $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k(x-a)^{k-1}$  s poloměrem konvergence  $r$  a primitivní

funkci  $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x-a)^{k+1}$  s poloměrem konvergence  $r$ .

**Důsledek.**

Nechť  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$  na  $U_r(a)$ .

Pak na  $U_r(a)$  máme pro  $n \in \mathbb{N}$  i derivace  $f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdot \dots \cdot (k-n+1) a_k(x-a)^{k-n}$ .

Poznámka: V bodech  $a \pm r$  se může stát cokoliv, nemáme větu, která by šla až do krajních bodů, takže tam můžeme ztratit vlastnosti (třeba konvergenci).

**Příklad.**

$f(x) = -\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} x^{k+1}$  konverguje na  $\langle -1, 1 \rangle$ , ale  $f'(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$  konverguje jen na  $(-1, 1)$ .

Poznámka: Je-li  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$  na  $U_r(a)$ , pak  $f^{(n)}(a) = n! a_n$  pro  $n \in \mathbb{N}_0$ .

**Definice.**

Nechť má  $f$  derivace všech řádů v  $a$ .

Definujeme **Taylorovu řadu** funkce  $f$  se středem v bodě  $a$  jako  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ .

Proces nalezení této řady se nazývá **rozvoj dané funkce v mocninnou/Taylorovu řadu (se středem  $a$ )**.

**Důsledek. (jednoznačnost rozkladu)**

Jestliže  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$  na  $U_r(a)$ , pak ta řada musí být nutně Taylorova.

Proces nalezení této řady se nazývá **rozvoj dané funkce v mocninnou/Taylorovu řadu (se středem  $a$ )**. Částečný součet je Taylorův polynom, takže víme vše, dokonce i rozdíl mezi  $T_n$  a  $f$  podle Lagrange.

**Příklad.**

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \text{ pro } x \in \mathbb{R}.$$

Důkaz: Označíme  $T_N = \sum_{k=0}^N \frac{x^k}{k!}$ . Pak dle Lagrangeova tvaru zbytku  $e^x - T_N(x) = R_N(x)$ ,

kde  $R_N(x) = \frac{[e^x]^{(N+1)}(c)}{(N+1)!} x^{N+1}$ . Zvolme pevné  $x$  a odhadujme  $|R_N(x)| \leq \frac{1}{(N+1)!} \max_{x \in 0x} |e^x| |x|^{N+1}$ ,

tedy pro  $x \geq 0$  máme  $|R_N(x)| \leq \frac{e^x |x|^{N+1}}{(N+1)!}$ , pro  $x \leq 0$  máme  $|R_N(x)| \leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}$ . Každopádně  $R_N(x) \rightarrow 0$ , tedy  $T_N(x) \rightarrow e^x$ .

**Věta.**

Nechť funkce  $f$  má derivace všech řádů na nějakém  $U_r(a)$  a  $\exists M > 0$  takové, že  $|f^{(k)}(a)| \leq M$  pro všechna  $k \in \mathbb{N}_0$  a  $x \in U_r(a)$ . Pak pro  $x \in U_r(a)$  je  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ .

**Fakt.**

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots, \quad x \in (-1, 1);$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad x \in (-1, 1);$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-3)}{3!} x^3 + \dots, \quad x \in (-1, 1).$$

$$\text{Zde } \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+2) \cdot (\alpha-k+1)}{k!}.$$

Další funkce děláme pomocí těchto a algebry, substituce atd.

**Příklad.**

Rozviňte  $f(x) = (x+3)e^{4x}$  v řadu se středem  $a = 0$ :

$$\begin{aligned} (x+3)e^{4x} &= xe^{4x} + 3e^{4x} = \langle y = 4x \rangle = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4x)^k}{k!} + 3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{k!} x^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 4^k}{k!} x^k \\ &= \langle k+1 \mapsto k^* \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^{k-1}}{(k-1)!} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 4^k}{k!} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k 4^{k-1}}{k!} x^k + 3 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 4^k}{k!} x^k \\ &= 3 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+12) 4^{k-1}}{k!} x^k, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Příklad.**

Rozviňte  $f(x) = \frac{1}{1+3x^2}$  v řadu se středem  $a = 0$ :

$$\frac{1}{1+3x^2} = \frac{1}{1-(-3x^2)} = \langle y = -3x^2, |y| < 1 \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} (-3x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 3^k x^{2k}, \quad |x| < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

**Příklad.**

Rozviňte  $f(x) = (x-1)\sin(\pi x)$  v řadu se středem  $a = -1$ :

$$\begin{aligned} (x-1)\sin(\pi x) &= (x - (-1) - 2)\sin(\pi(x - (-1) - 1)) \\ &= (x - (-1))\sin(\pi(x - (-1)) - \pi) - 2\sin(\pi(x - (-1)) - \pi) \\ &= -(x+1)\sin(\pi(x+1)) + 2\sin(\pi(x+1)) = \langle\langle y = \pi(x+1) \rangle\rangle \\ &= -(x+1)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\pi(x+1)]^{2k+1}}{(2k+1)!} + 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\pi(x+1)]^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\pi^{2k+1}}{(2k+1)!}(x - (-1))^{2k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi^{2k+1}}{(2k+1)!}(x - (-1))^{2k+2}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Příklad.**

Rozviňte  $f(x) = \ln(1+x)$  v řadu se středem  $a = 0$ :

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \int \frac{dx}{x+1} = \int \frac{1}{1-(-x)} dx = \langle\langle y = -x, |y| < 1 \rangle\rangle = \int \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int (-1)^k x^k dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + C = \langle\langle k+1 \mapsto k^* \rangle\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + C; \end{aligned}$$

Kolik je  $C$ ? Dosadíme  $x = 0$ :  $\ln(1+0) = \sum 0 + C$ , tedy  $C = 0$ .

Proto  $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$ ,  $|x| < 1$ .

Funguje i pro  $x = 1$ , ne pro  $x = -1$ .

**Příklad.**

Rozviňte  $f(x) = \frac{1}{(2x-5)^2}$  v řadu se středem  $a = 1$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2x-5)^2} &= \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{2x-5}\right]' = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2(x-1)-3}\right]' = \frac{1}{6} \left[\frac{1}{1-\frac{2}{3}(x-1)}\right]' = \langle\langle y = \frac{2}{3}(x-1), |y| < 1 \rangle\rangle \\ &= \frac{1}{6} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}(x-1)\right)^k\right]' = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k [(x-1)^k]' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^k k(x-1)^{k-1} = \langle\langle k-1 \mapsto k^* \rangle\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{3^{k+2}} (k+1)(x-1)^k, \quad |x-1| < \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

**Mocninné řady v komplexním oboru.**

Komplexní  $\infty$ ,  $\frac{1}{\infty} = 0$ ,  $\frac{1}{0} = \infty$ , neexistuje  $e^\infty$ !

Okolí v komplexní rovině:  $U_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < \varepsilon\}$ ,  $U_\varepsilon(\infty) = \{z \in \mathbb{C}; |z| > 1/\varepsilon\}$ .

Definice, které se dělají přes okolí, jsou v  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{C}$  stejné (limita, součet řady). Proto i věty, které používají okolí a nepoužívají porovnávání mezi prvky (mohou používat porovnávání mezi absolutními hodnotami prvků), platí v komplexním oboru, například podílové a odmocninové testy konvergence, když se aplikují na absolutní konvergenci.

I mocninné řady pak fungují stejně, včetně toho, že např. je-li  $r$  poloměr konvergence komplexní mocninné řady, pak tato konverguje absolutně na  $U_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r\}$ .

### 3. Fourierovy řady

#### Definice.

**Trigonometrická řada** je řada  $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$ .

**Trigonometrický polynom** stupně  $N$  je  $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$ .

Poznámka: Jsou to speciální případy **Fourierových řad**, budeme jim tak říkat. Které funkce se dají rozvinout ve Fourierovy řady?

#### Fakt.

Funkce  $\sin(k\omega t)$ ,  $\cos(k\omega t)$  jsou periodické s periodou  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

Proto jsou i trigonometrické polynomy a trigonometrická řada (pokud konverguje)  $T$ -periodické.

Tedy pouze funkce periodické mohou být součtem Fourierovy řady. Máme-li takovou funkci, jaká řada je nejlepším kandidátem na rozvoj?

#### Věta.

Nechť  $\omega > 0$ ,  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Pak platí:

$$(i) \int_0^T \sin^2(k\omega t) dt = \int_0^T \cos^2(k\omega t) dt = \frac{T}{2} \text{ pro } k \in \mathbb{N},$$

$$(ii) \int_0^T \sin(k\omega t) \sin(m\omega t) dt = \int_0^T \cos(k\omega t) \cos(m\omega t) dt = 0 \text{ pro } k \neq m \in \mathbb{N},$$

$$(iii) \int_0^T \sin(k\omega t) \cos(m\omega t) dt = 0 \text{ pro } k, m \in \mathbb{N}.$$

Remark on (i):  $\int_0^T \sin^2(k\omega t) dt = 0$  and  $\int_0^T \cos^2(k\omega t) dt = T$  for  $k = 0$ .

#### Věta.

Nechť  $f$  je  $T$ -periodická funkce, označme  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

Jestliže  $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \rightrightarrows f$  na  $\langle 0, T \rangle$ , pak

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt \text{ pro } k \in \mathbb{N}_0 \text{ a } b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt \text{ pro } k \in \mathbb{N}.$$

Poznámka:  $a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt$ .

#### Definice.

Nechť  $f$  je funkce, která je  $T$ -periodická a integrovatelná na  $\langle 0, T \rangle$ .

Definujeme její **Fourierovu řadu** jako  $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$ , kde

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt \text{ pro } k \in \mathbb{N}_0 \text{ a } b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt \text{ pro } k \in \mathbb{N}.$$

Značíme  $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$ .

Poznámka: Je-li funkce  $g$  periodická s  $T$ , pak  $\forall a \in \mathbb{R}$  platí  $\int_0^T g(t) dt = \int_a^{a+T} g(t) dt$ . Toto se dá aplikovat na funkce a integrály ve vzorcích pro Fourierovu transformaci, populární jsou například  $a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt$  pro  $k \in \mathbb{N}_0$  a  $b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(k\omega t) dt$  pro  $k \in \mathbb{N}$ .

**Definice.**

Nechť  $f$  je funkce definovaná na intervalu  $I = \langle a, a + T \rangle$  pro nějaké  $a \in \mathbb{R}$ ,  $T > 0$ .

Její **periodické prodloužení na  $\mathbb{R}$**  definujeme jako funkci

$$f(t) = f(t - kT) \text{ pro } t \in \langle a + kT, a + (k + 1)T \rangle.$$

Poznámka: Vznikne funkce  $T$ -periodická na  $\mathbb{R}$ .

**Definice.**

Nechť  $f$  je funkce definovaná na intervalu  $I = \langle a, a + T \rangle$  pro nějaké  $a \in \mathbb{R}$ ,  $T > 0$ .

Definujeme její Fourierovou řadu jako Fourierovu řadu jejího periodického prodloužení.

**Příklad.**

Fourierova řada funkce  $f(t) = t^2$  na  $\langle -1, 1 \rangle$ .  $T = 2$ ,  $\omega = \pi$ .

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 f(t) dt = \int_{-1}^1 f(t) dt = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}.$$

$$a_k = \frac{2}{2} \int_{-1}^1 t^2 \cos(k\pi t) dt = \frac{4 \cos(k\pi)}{\pi^2 k^2} = \frac{4(-1)^k}{\pi^2 k^2}.$$

$$b_k = \frac{2}{2} \int_{-1}^1 t^2 \sin(k\pi t) dt = 0.$$

$$\text{Proto } f \sim \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{\pi^2 k^2} \cos(k\pi t).$$

**Věta. (Jordanovo kritérium)**

Nechť  $f$  je  $T$ -periodická funkce, která je po částech spojitá na nějakém intervalu  $I$  délky  $T$ , nechť má derivaci  $f'$  po částech spojitou na  $I$ .

Nechť  $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$ . Pak pro každé  $t \in \mathbb{R}$  platí

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \right) = \frac{1}{2} [f(t^-) + f(t^+)].$$

Je-li navíc  $f$  spojitá na  $\mathbb{R}$ , pak  $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \rightrightarrows f$ .

**Příklad.**

Pro každé  $t \in \langle -1, 1 \rangle$  je  $t^2 = \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{\pi^2 k^2} \cos(k\pi t)$ .

Použití pro  $t = 0$  dá  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}$ .

Použití pro  $t = 1$  dá  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

**Definice.**

Nechť  $f$  je funkce definovaná a spojitá na  $\langle 0, L \rangle$ .

Definujeme její **sinovou řadu** jako Fourierovu řadu jejího lichého periodického rozšíření.

Definujeme její **kosinovou řadu** jako Fourierovu řadu jejího sudého periodického rozšíření.

**Věta.**

Nechť  $f$  je  $T$ -periodická funkce integrovatelná na  $\langle 0, T \rangle$ , necht'  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

(i) Je-li  $f$  lichá, je  $a_k = 0$  a  $b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(k\omega t) dt$ .

(ii) Je-li  $f$  sudá, je  $b_k = 0$  a  $a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt$ .

**Fakt.**

Nechť  $f$  je funkce definovaná a spojitá na  $\langle 0, L \rangle$ .

Její sinovou Fourierovu řadu lze získat jako Fourierovu řadu s  $a_k = 0$ ,  $b_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin(k\omega t) dt$   
a  $\omega = \frac{\pi}{L}$ .

Její kosinovou Fourierovu řadu lze získat jako Fourierovu řadu s  $b_k = 0$ ,  $a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos(k\omega t) dt$   
a  $\omega = \frac{\pi}{L}$ .

Poznámka: Součtem sinové řady je  $T = 2L$ -periodické prodloužení  $f$  na lichou funkci. Součtem kosinové řady je  $T = 2L$ -periodické prodloužení  $f$  na sudou funkci. Oba součty je ovšem nutno modifikovat podle Jordanova kritéria.

**Příklad.**

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in \langle 0, 1 \rangle; \\ 0, & t \in \langle 1, 2 \rangle. \end{cases}$$

Fourierova řada:  $T = 2$ ,  $\omega = \pi$ .

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 f(t) dt = \int_0^1 dt = 1.$$

$$a_k = \frac{2}{2} \int_0^1 \cos(k\pi t) dt = \left[ \frac{1}{k\pi} \sin(k\pi t) \right]_0^1 = 0.$$

$$b_k = \frac{2}{2} \int_0^1 \sin(k\pi t) dt = \left[ -\frac{1}{k\pi} \cos(k\pi t) \right]_0^1 = \frac{1}{k\pi} [1 - \cos(k\pi)] = \frac{1}{k\pi} [1 - (-1)^k] = \begin{cases} 0, & k \text{ sudé;} \\ \frac{2}{k\pi}, & k \text{ liché.} \end{cases}$$

$$\text{Proto } f \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} [1 - (-1)^k] \sin(k\pi t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)\pi t).$$

Sinová Fourierova řada:  $L = 2$ ,  $T = 4$ ,  $\omega = \frac{\pi}{2}$ ,  $a_k = 0$ .

$$b_k = \frac{2}{2} \int_0^1 \sin(k\frac{\pi}{2}t) dt = \left[ -\frac{2}{k\pi} \cos(k\frac{\pi}{2}t) \right]_0^1 = \frac{2}{k\pi} [\cos(k\pi) - \cos(k\frac{\pi}{2})].$$

$$\text{Proto } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} [(-1)^k - \cos(k\frac{\pi}{2})] \sin(k\frac{\pi}{2}t).$$

Kosinová Fourierova řada:  $L = 2$ ,  $T = 4$ ,  $\omega = \frac{\pi}{2}$ ,  $b_k = 0$ .

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^1 dt = 1.$$

$$a_k = \frac{2}{2} \int_0^1 \cos(k\frac{\pi}{2}t) dt = \left[ \frac{2}{k\pi} \sin(k\frac{\pi}{2}t) \right]_0^1 = \frac{2}{k\pi} \sin(k\frac{\pi}{2}).$$

$$\text{Proto } \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \sin(k\frac{\pi}{2}) \cos(k\frac{\pi}{2}t).$$

$$\text{Zde } a_{2k} = 0, a_{2k+1} = (-1)^{k+1} \frac{2}{(2k+1)\pi}, \text{ tedy } \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{(2k+1)\pi} \cos((2k+1)\frac{\pi}{2}t).$$

Poznámka: Když je  $f$   $T$ -periodická, pak je i její derivace  $f'$   $T$ -periodická, ale neplatí to pro primitivní funkci  $F(t) = \int_0^t f(u) du$ . Ta je  $T$ -periodická, pokud  $\int_0^T f(u) du = 0$ , tj.  $a_0 = 0$ .

**Věta.**

Nechť  $f$  je  $T$ -periodická funkce, která je po částech spojitá na  $\langle 0, T \rangle$  a má po částech spojitou derivaci na  $\langle 0, T \rangle$ . Nechť  $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$ .

$$(i) f' \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [-a_k \sin(k\omega t)k\omega + b_k \cos(k\omega t)k\omega] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [b_k k\omega \cos(k\omega t) - a_k k\omega \sin(k\omega t)].$$

(ii) Je-li  $\int_0^T f(u) du = 0$  (tj.  $a_0 = 0$ ), pak

$$F(t) = \int_0^t f(u) du \sim \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \sin(k\omega t) \frac{1}{k\omega} - b_k \cos(k\omega t) \frac{1}{k\omega}] = \sum_{k=1}^{\infty} [\frac{-b_k}{k\omega} \cos(k\omega t) + \frac{a_k}{k\omega} \sin(k\omega t)].$$

Poznámka: Víme-li, že Fourierova řada konverguje k  $f$  na nějakém intervalu  $\langle a, b \rangle$ , pak bohužel nemůžeme říci, že by tam byla konvergence stejnoměrná. Na krajích intervalu totiž dochází k tzv. Gibbsově jevu.

**Definice.**

Nechť  $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$ . Označme  $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ , najdeme  $\varphi_k$  tak, aby

$$b_k = A_k \cos(\varphi_k) \text{ a } a_k = A_k \sin(\varphi_k). \text{ Pak } f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \varphi_k).$$

Tuto řadu nazýváme **Fourierova řada v amplitudově-fázovém tvaru**.

Označme  $c_0 = \frac{a_0}{2}$  a  $c_k = \frac{1}{2}(a_k - j b_k)$ ,  $c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + j b_k)$  pro  $k \in \mathbb{N}$ . Pak  $f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega t}$ .

Tuto řadu nazýváme **Fourierova řada v komplexním tvaru**.

Poznámka:  $\varphi_k = \arctg(\frac{a_k}{b_k})$ , popř.  $\varphi_k = \operatorname{arccotg}(\frac{b_k}{a_k})$ , popř. posuny, viz převod z kartézských souřadnic na polární.

**Fakt.**

$$\text{Platí } c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega t} dt.$$



## 4. Aplikace řad

**Příklad.**

$$y'' + y = \begin{cases} 1, & t \in \langle 2k, 2k+1 \rangle; \\ 0, & t \in \langle 2k-1, 2k \rangle. \end{cases}$$

Rozvineme pravou stranu  $f = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{k\pi} \sin(k\pi t)$ .

Předpokládáme, že řešení lze nalézt ve tvaru  $y = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\pi t) + b_k \sin(k\pi t)]$ .

Dosadíme do rovnice a dostaneme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k(1 - k^2\pi^2) \cos(k\pi t) + b_k(1 - k^2\pi^2) \sin(k\pi t)] = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{k\pi} \sin(k\pi t).$$

Porovnáním obou stran máme  $a_0 = 1$ ,  $a_k = 0$  pro  $k \geq 1$  a  $b_k = \frac{1-(-1)^k}{k\pi(1-k^2\pi^2)}$

$$\text{a tedy } y = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{k\pi(1-k^2\pi^2)} \sin(k\pi t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi(1-(2k+1)^2\pi^2)} \sin((2k+1)\pi t).$$

**Příklad.**

$$y'' - x^3 y = 24x^2 \text{ okolo } x_0 = 0.$$

Napravo je mocninná řada s  $x_0 = 0$ , zkusíme hledat řešení ve tvaru  $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ .

Dosadíme do rovnice a dostaneme  $\sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)x^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+3} = 24x^2$ , tedy

$$2a_2 + 6a_3 x + 2a_4 x^2 + \sum_{k=3}^{\infty} [a_{k+2}(k+1)(k+2) - a_{k-3}] x^k = 24x^2.$$

Porovnáním obou stran máme  $a_2 = 0$ ,  $a_3 = 0$ ,  $a_4 = 2$ , dále rovnice  $3 \cdot 5a_5 - a_0 = 0$ ,  $5 \cdot 6a_6 - a_1 = 0$ ,  $6 \cdot 7a_7 - a_2 = 0$ ,  $7 \cdot 8a_8 - a_3 = 0$ ,  $8 \cdot 9a_9 - a_4 = 0$ ,  $9 \cdot 10a_{10} - a_5 = 0$ ,  $10 \cdot 11a_{11} - a_6 = 0$ , atd. Zvolíme  $a_0 = a$ ,  $a_1 = b$ , pak  $a_5 = \frac{a}{20}$ ,  $a_6 = \frac{b}{30}$ ,  $a_7 = a_8 = 0$ ,  $a_9 = \frac{1}{36}$ ,  $a_{10} = \frac{a}{1800}$ ,  $a_{11} = \frac{b}{3300}$ ,  $a_{12} = a_{13} = 0$ , atd

$$\text{a tedy } y(x) = a + bx + 2x^4 + \frac{a}{20}x^5 + \frac{b}{30}x^6 + \frac{1}{36}x^9 + \frac{a}{1800}x^{10} + \frac{b}{3300}x^{11} + \dots$$

**Příklad.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - [1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots]}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \dots}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4!} + \dots \right) = \frac{1}{2}.$$

**Příklad.**

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} \sin(x) dx &= \int \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \int x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + C \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(2k+1)} x^{2k+1} + C. \end{aligned}$$