

Cvičné příklady na Fourierovy řady
Stručná řešení

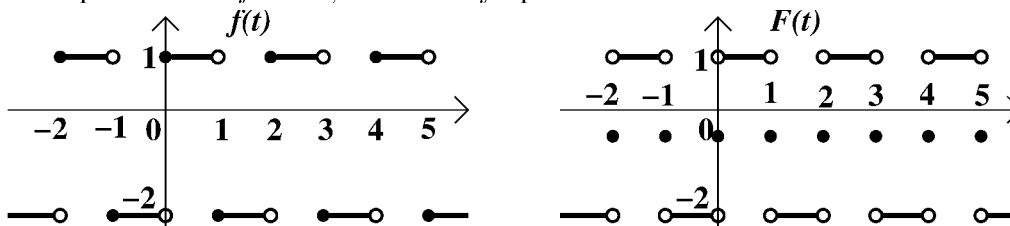
1. Fourierova řada: $T = 2, \omega = \pi$. $a_0 = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 1 dt - 2 \int_1^2 1 dt \right) = -1$.

$$a_k = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \cos(k\pi t) dt - 2 \int_1^2 \cos(k\pi t) dt \right) = 0.$$

$$b_k = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \sin(k\pi t) dt - 2 \int_1^2 \sin(k\pi t) dt \right) = \frac{3}{k\pi} [1 - (-1)^k] = \begin{cases} 0, & k \text{ sudé,} \\ \frac{6}{k\pi}, & k \text{ liché.} \end{cases}$$

$$f \sim -\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k\pi} [1 - (-1)^k] \sin(k\pi t) = -\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)\pi t).$$

Součet: Periodické prodloužení f vlevo, součet řady vpravo:



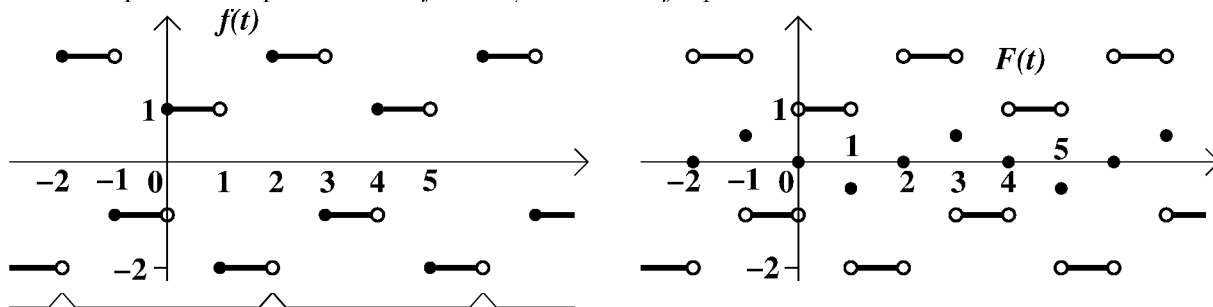
Poznámka: f je tvaru “lichá” $-\frac{1}{2}$, proto i řada je tvaru “sinová” $-\frac{1}{2}$.

sinová Fourierova řada: $L = 2, T = 4, \omega = \frac{\pi}{2}$. $a_k = 0$.

$$b_k = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \sin(k\frac{\pi}{2} t) dt - 2 \int_1^2 \sin(k\frac{\pi}{2} t) dt \right) = \frac{2}{k\pi} [1 + 2(-1)^k - 3 \cos(k\frac{\pi}{2})].$$

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} [1 + 2(-1)^k - 3 \cos(k\frac{\pi}{2})] \sin(k\frac{\pi}{2} t).$$

Součet: **Liché** periodické prodloužení f vlevo, součet řady vpravo:

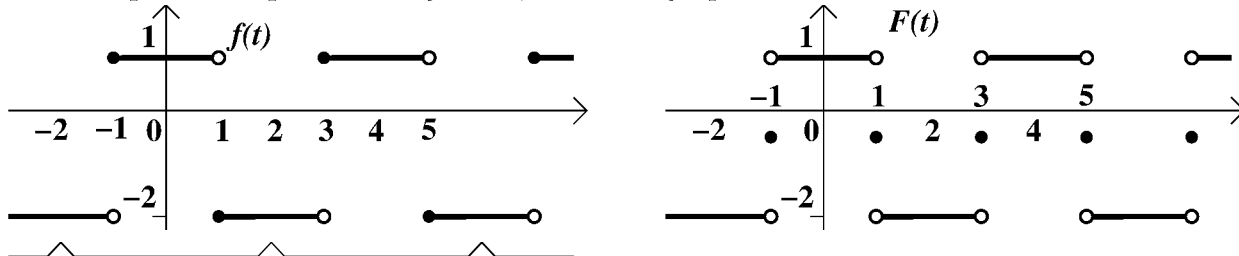


kosinová Fourierova řada: $L = 2, T = 4, \omega = \frac{\pi}{2}$. $b_k = 0, a_0 = -1$ (viz Fourierova řada).

$$a_k = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \cos(k\frac{\pi}{2} t) dt - 2 \int_1^2 \cos(k\frac{\pi}{2} t) dt \right) = \frac{6}{k\pi} \sin(k\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0, & k \text{ sudé,} \\ (-1)^n \frac{6}{k\pi}, & k \text{ liché, } k = 2n + 1. \end{cases}$$

$$f \sim -\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k\pi} \sin(k\frac{\pi}{2}) \cos(k\frac{\pi}{2} t) = -\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{6}{(2k+1)\pi} \cos((2k+1)\frac{\pi}{2} t).$$

Součet: **Sudé** periodické prodloužení f vlevo, součet řady vpravo:

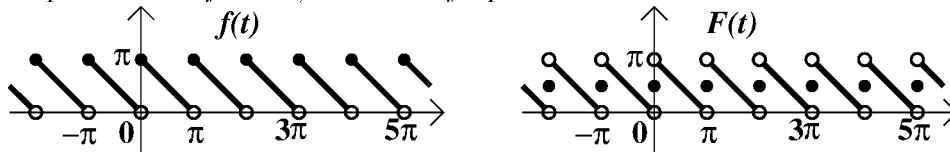


2. Fourierova řada: $T = \pi, \omega = 2$. $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - t) dt = \pi$.

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - t) \cos(2kt) dt = 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - t) \sin(2kt) dt = \frac{1}{k} \text{ (pomocí per partes).}$$

$$f \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(2kt).$$

Součet: Periodické prodloužení f vlevo, součet řady vpravo:

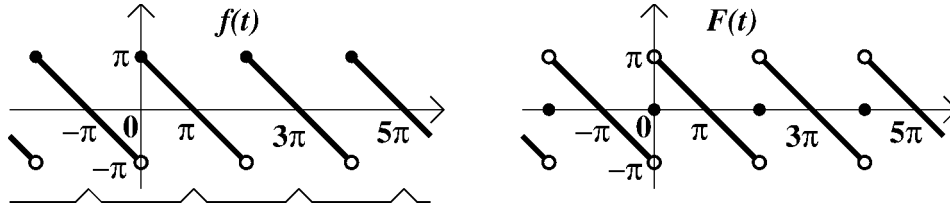


Poznámka: f je tvaru “lichá” + $\frac{\pi}{2}$, proto i řada je tvaru “sinová” + $\frac{\pi}{2}$.

sinová Fourierova řada: $L = \pi, T = 2\pi, \omega = 1.$ $a_k = 0.$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - t) \sin(kt) dt = \frac{2}{k} \text{ (pomocí per partes).} \quad f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \sin(kt).$$

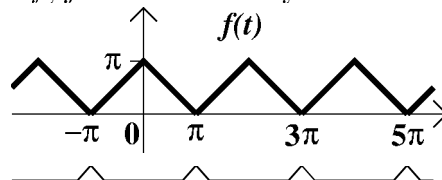
Součet: **Liché** periodické prodloužení f vlevo, součet řady vpravo:



kosinová Fourierova řada: $L = \pi, T = 2\pi, \omega = 1.$ $b_k = 0, a_0 = \pi.$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - t) \cos(kt) dt = \frac{4}{k^2\pi} \text{ (pomocí per partes).} \quad f \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2\pi} \cos(kt).$$

Součet: **Sudé** periodické prodloužení f , je to i součet řady:



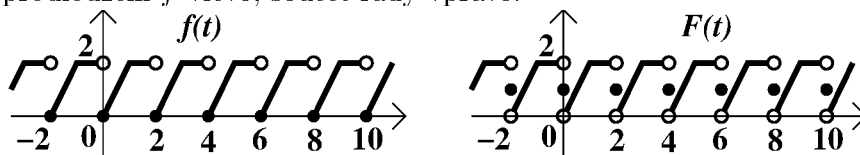
3. Fourierova řada: $T = 2, \omega = \pi.$ $a_0 = \frac{2}{2} \left(\int_0^1 2t dt + 2 \int_1^2 1 dt \right) = 3.$

$$a_k = \frac{2}{2} \left(\int_0^1 2t \cos(k\pi t) dt + 2 \int_1^2 \cos(k\pi t) dt \right) = \frac{2}{k\pi} [(-1)^k - 1] = \begin{cases} 0, & k \text{ sudé,} \\ -\frac{4}{k\pi}, & k \text{ liché} \end{cases} \text{ (pomocí per partes).}$$

$$b_k = \frac{2}{2} \left(\int_0^1 2t \sin(k\pi t) dt + 2 \int_1^2 \sin(k\pi t) dt \right) = -\frac{2}{k\pi} \text{ (pomocí per partes).}$$

$$f \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k\pi} [(-1)^k - 1] \cos(k\pi t) - \frac{2}{k\pi} \sin(k\pi t) \right) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4}{(2k+1)\pi} \cos((2k+1)\pi t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \sin(k\pi t).$$

Součet: Periodické prodloužení f vlevo, součet řady vpravo:

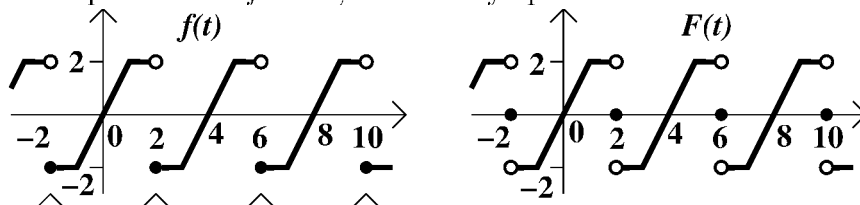


sinová Fourierova řada: $L = 2, T = 4, \omega = \frac{\pi}{2}.$ $a_k = 0.$

$$b_k = \frac{2}{2} \left(\int_0^1 2t \sin\left(k\frac{\pi}{2}t\right) dt + 2 \int_1^2 \sin\left(k\frac{\pi}{2}t\right) dt \right) = \frac{4}{k^2\pi^2} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \frac{4}{k\pi} (-1)^k \text{ (pomocí per partes).}$$

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{4}{k^2\pi^2} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \frac{4}{k\pi} (-1)^k \right] \sin\left(k\frac{\pi}{2}t\right).$$

Součet: **Liché** periodické prodloužení f vlevo, součet řady vpravo:

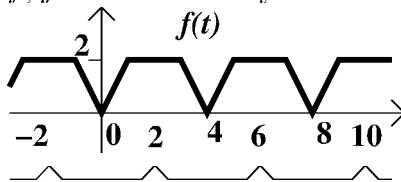


kosinová Fourierova řada: $L = 2, T = 4, \omega = \frac{\pi}{2}.$ $b_k = 0, a_0 = 3.$

$$a_k = \frac{2}{2} \left(\int_0^1 2t \cos\left(k\frac{\pi}{2}t\right) dt + 2 \int_1^2 \cos\left(k\frac{\pi}{2}t\right) dt \right) = \frac{8}{k^2\pi^2} [\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - 1] \text{ (pomocí per partes).}$$

$$f \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{k^2 \pi^2} [\cos(k\frac{\pi}{2}) - 1] \cos(k\frac{\pi}{2}t).$$

Součet: **Sudé** periodické prodloužení f , je to i součet řady:



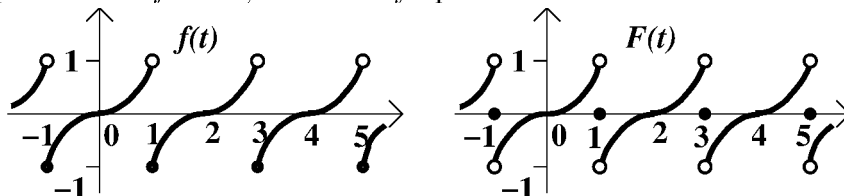
4. Fourierova řada: $T = 2, \omega = \pi.$ $a_0 = \frac{2}{2} \int_{-1}^1 t^3 dt = 0.$

$$a_k = \frac{2}{2} \int_{-1}^1 t^3 \cos(k\pi t) dt = 0 \text{ (per partes třikrát).}$$

$$b_k = \frac{2}{2} \int_{-1}^1 t^3 \sin(k\pi t) dt = -\frac{2}{k\pi}(-1)^k + \frac{12}{k^3\pi^3} \text{ (per partes třikrát).}$$

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{12}{k^3\pi^3} - (-1)^k \frac{2}{k\pi} \right] \sin(k\pi t).$$

Součet: Periodické prodloužení f vlevo, součet řady vpravo:



sinová, kosinová Fourierova řada: Funkce byla zadána na intervalu, který “překračuje” počátek, tedy zahrnuje kladná i záporná čísla. Nemáme proto možnost si funkci upravit tak, aby byla symetrická, můžeme jen doufat, že nějakou symetrii už měla ze zadání. Vidíme, že je lichá, proto i její rozšíření je liché a máme tedy řadu sinovou, kosinovou nelze udělat.

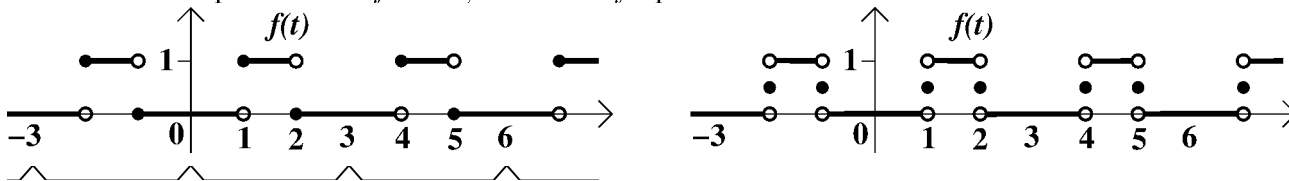
5. Fourierova řada: $T = 3, \omega = \frac{2}{3}\pi.$ $a_0 = \frac{2}{3} \int_1^2 1 dt = \frac{2}{3}.$

$$a_k = \frac{2}{3} \int_1^2 \cos(\frac{2}{3}k\pi t) dt = \frac{1}{k\pi} [\sin(\frac{4\pi}{3}k) - \sin(\frac{2\pi}{3}k)].$$

$$b_k = \frac{2}{3} \int_1^2 \sin(\frac{2}{3}k\pi t) dt = \frac{1}{k\pi} [\cos(\frac{2\pi}{3}k) - \cos(\frac{4\pi}{3}k)].$$

$$f \sim \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k\pi} [\sin(\frac{4\pi}{3}k) - \sin(\frac{2\pi}{3}k)] \cos(\frac{2}{3}k\pi t) + \frac{1}{k\pi} [\cos(\frac{2\pi}{3}k) - \cos(\frac{4\pi}{3}k)] \sin(\frac{2}{3}k\pi t) \right].$$

Součet: Periodické prodloužení f vlevo, součet řady vpravo:



Při pohledu na obrázek vidíme, že výsledné prodloužení je sudé, měla by tedy vzniknout sudá řada. Je tomu tak? Podívejme se na koeficient b_k . Díky periodicitě jej stačí prozkoumat pro $k = 1, 2, 3$ a vidíme, že vždy vyjde nula. Opravdu tedy máme kosinovou řadu:

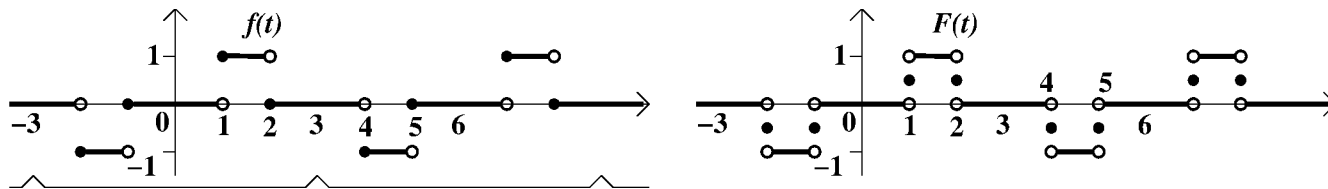
$$f \sim \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} [\sin(\frac{4\pi}{3}k) - \sin(\frac{2\pi}{3}k)] \cos(\frac{2}{3}k\pi t).$$

sinová Fourierova řada: $L = 3, T = 6, \omega = \frac{\pi}{3}.$ $a_k = 0.$

$$b_k = \frac{2}{3} \int_1^2 \sin(\frac{\pi}{3}kt) dt = \frac{2}{k\pi} [\cos(\frac{\pi}{3}k) - \cos(\frac{2\pi}{3}k)].$$

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} [\cos(\frac{\pi}{3}k) - \cos(\frac{2\pi}{3}k)] \sin(\frac{\pi}{3}kt).$$

Součet: **Liché** periodické prodloužení f vlevo, součet řady vpravo:



kosinová Fourierova řada: Již jsme vlastně jednu dostali v první části. Teď to ale zkusíme standardním způsobem. $L = 3, T = 6, \omega = \frac{\pi}{3}, b_k = 0, a_0 = \frac{2}{3}$ (viz Fourierova řada).

$$a_k = \frac{2}{3} \int_1^2 \cos\left(\frac{\pi}{3}kt\right) dt = \frac{2}{k\pi} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{3}k\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}k\right) \right].$$

$$f \sim \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{3}k\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}k\right) \right] \cos\left(\frac{\pi}{3}kt\right).$$

Součet viz předtím. Proč máme jiný vzorec? On vlastně jiný není. Snadno se nahlédne, že pro lichá k jsou koeficienty rovny nule (díky periodicitě to stačí ověřit pro $k = 1, 3, 5$). Když napíšeme $k = 2n$, dostaneme stejnou řadu jako předtím.

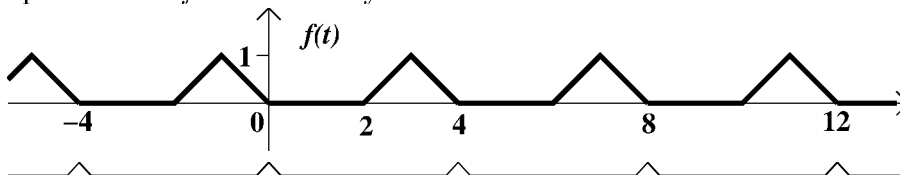
6. Fourierova řada: $T = 4, \omega = \frac{\pi}{2}, a_0 = \frac{2}{4} \left(\int_2^3 (t-2) dt + \int_3^4 (4-t) dt \right) = 1.$

$$a_k = \frac{2}{4} \left(\int_2^3 (t-2) \cos\left(\frac{\pi}{2}kt\right) dt + \int_3^4 (4-t) \cos\left(\frac{\pi}{2}kt\right) dt \right) = \frac{2}{k^2\pi^2} \left[2 \cos\left(\frac{3\pi}{2}k\right) - \cos(\pi k) - \cos(2\pi k) \right].$$

$$b_k = \frac{2}{4} \left(\int_2^3 (t-2) \sin\left(\frac{\pi}{2}kt\right) dt + \int_3^4 (4-t) \sin\left(\frac{\pi}{2}kt\right) dt \right) = \frac{4}{k^2\pi^2} \sin\left(\frac{3\pi}{2}k\right).$$

$$f \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2}{k^2\pi^2} \left[2 \cos\left(\frac{3\pi}{2}k\right) - 1 - (-1)^k \right] \cos\left(\frac{\pi}{2}kt\right) + \frac{4}{k^2\pi^2} \sin\left(\frac{3\pi}{2}k\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}kt\right) \right].$$

Součet: Periodické prodloužení f a součet řady:

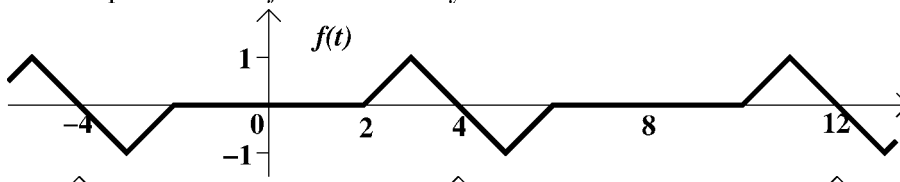


sinová Fourierova řada: $L = 4, T = 8, \omega = \frac{\pi}{4}, a_k = 0.$

$$b_k = \frac{2}{4} \left(\int_2^3 (t-2) \sin\left(\frac{\pi}{4}kt\right) dt + \int_3^4 (4-t) \sin\left(\frac{\pi}{4}kt\right) dt \right) = \frac{8}{k^2\pi^2} \left[2 \sin\left(\frac{3\pi}{4}k\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) \right]$$

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{k^2\pi^2} \left[2 \sin\left(\frac{3\pi}{4}k\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) \right] \sin\left(\frac{\pi}{4}kt\right).$$

Součet: **Liché** periodické prodloužení f a součet řady:



kosinová Fourierova řada: $L = 4, T = 8, \omega = \frac{\pi}{4}, b_k = 0, a_0 = 1$ (viz Fourierova řada).

$$a_k = \frac{2}{4} \left(\int_2^3 (t-2) \cos\left(\frac{\pi}{4}kt\right) dt + \int_3^4 (4-t) \cos\left(\frac{\pi}{4}kt\right) dt \right) = \frac{8}{k^2\pi^2} \left[2 \cos\left(\frac{3\pi}{4}k\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) - \cos(\pi k) \right].$$

$$f \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{k^2\pi^2} \left[2 \cos\left(\frac{3\pi}{4}k\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) - (-1)^k \right] \cos\left(\frac{\pi}{4}kt\right).$$

Součet: **Sudé** periodické prodloužení f a součet řady:

