## Kombinatorika a geometrická pravděpodobnost

1. Mějme v rovině 6 bodů, z nichž žádné tři neleží na jedné přímce. Spojíme náhodně vybrané 3 dvojice úsečkou. Jaká je pravděpodobnost, že vznikne trojúhelník, jestliže

   (a) dvojice se ve výběru mohou opakovat?

   (b) dvojice se ve výběru nemohou opakovat?

   **Řešení**: Počet všech možných úseček je $\binom{6}{2} = 15$.

$$(a)\ P = \frac{15 \cdot 8 \cdot 1}{15^3} = \frac{8}{225}, \quad (b)\ P = \frac{15 \cdot 8 \cdot 1}{15 \cdot 14 \cdot 13} = \frac{8}{182}.$$

2. V krabici je 6 zelených a 11 žlutých míčků. Postupně vytáhneme náhodně tři z nich. Víme, že první a třetí tažený míček je žlutý. Který způsob tahu - s navrácením po každém tahu nebo bez navrácení - dá větší pravděpodobnost tohoto jevu?

   **Řešení**: S navrácením: Počet všech trojic vytažených míčků je $17^3$. Protože na druhém místě může být buď zelený - takových trojic je $11 \cdot 6 \cdot 11$ - nebo žlutý, takových trojic je $11^3$, je

$$P = \frac{11^2 \cdot 6 + 11^3}{17^3} = 0.418$$

   Bez navrácení: Počet všech trojic je $17 \cdot 16 \cdot 15$. Počet příznivých trojic je $11 \cdot 6 \cdot 10 + 11 \cdot 10 \cdot 9$. Takže

$$P = \frac{11 \cdot 6 \cdot 10 + 11 \cdot 10 \cdot 9}{17 \cdot 16 \cdot 15} = 0.404.$$

3. 5 vadných tištěných spojů je zamícháno mezi 10 dobrých. Postupně je testujeme dokud neobjevíme všechny dobré spoje. Jaká je pravděpodobnost, že poslední z dobrých spojů bude objeven jako 12-tý v pořadí?

   **Řešení**: Všech uspořádání 15 spojů je 15!. Příznivá uspořádání vzniknou takto: Na zadané 12. místo dáme jeden z 10 dobrých spojů. Za něj na místa 13, 14 a 15 umístíme 3 vadné spoje, což lze $5 \cdot 4 \cdot 3$ způsoby. Na zbylá místa $1 - 11$ dáme zbylých 11 spojů jakkoli, což lze 11! způsoby.

$$P = \frac{10 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 11!}{15!} = 0.018.$$

4. Studenti A a B jdou na zkoušku, jejíž hodnocení je 1, 2 a 3. Označíme následující jevy

$$\begin{aligned} A &= \{\text{A dostane 2}\}, \\ B &= \{\text{B dostane 2}\}, \\ C &= \{\text{žádný 1, ale aspoň jeden 2}\} \end{aligned}$$

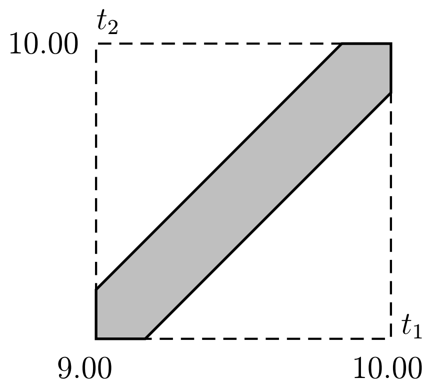
   a víme, že $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.3$ a $P(C) = 0.4$. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň jeden dostane 2, ale nikdo 3?

   **Řešení**: Označíme si $D = \{\text{alespoň jeden dostane 2, ale nikdo 3}\}$. Pak $C \subset A \cup B$ a $D = \big((A \cup B) \setminus C\big) \cup (A \cap B)$. Odtud

$$\begin{aligned} P(D) &= P\big((A \cup B) \setminus C\big) + P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(C) + P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(C) + P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(C) = 0.2. \end{aligned}$$

5. Dva přátelé $A$ a $B$ si domluví schůzku mezi 9.00 a 10.00. Jejich příchody na dané místo jsou náhodné v rámci smluveného časového intervalu. Každý bude čekat 10 minut a pak odchází. Jaká je pravděpodobnost, že dojde k setkání?

   **Řešení**: Všechny možné časy příchodů obou přátel je množina dvojic $(t_1, t_2)$, kde $t_1$ je čas příchodu osoby $A$ a $t_2$ čas příchodu osoby $B$. (Na obrázku je tato množina reprezentována celým čtvercem s čárkovaným okrajem.) Aby se oba přátelé potkali, musí se doby jejich příchodů lišit maximálně o 1/6 hodiny. Takové příznivé dvojice časů $(t_1, t_2)$ jsou na obrázku vyznačeny šedivou oblastí kolem diagonály.




   Tato šedivá oblast zabírá z obsahu čtverce 11/36, což je hledaná pravděpodobnost.

6. Úsečku délky $r$ rozdělíme náhodně na tři části. Jaká je pravděpodobnost, že ze vzniklých částí lze sestrojit trojúhelník?

   **Řešení**: 1/4

7. Z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ vybereme postupně tři čísla $x_1, x_2$ a $x_3$. Jaká je pravděpodobnost, že třetí vybrané číslo bude ležet mezi prvními dvěma?

   **Řešení**: Máme šest možností, jak bude vybraná trojice čísel vypadat:

$$\begin{gathered} x_1 < x_2 < x_3 \\ x_1 < x_3 < x_2 \\ x_2 < x_1 < x_3 \\ x_2 < x_3 < x_1 \\ x_3 < x_1 < x_2 \\ x_3 < x_2 < x_1. \end{gathered}$$

   Díky symetrii mají všechny tyto možnost stejnou pravděpodobnost. Příznivé výběry jsou dva, druhý a čtvrtý, a proto je pravděpodobnost rovna 1/3.

8. V krabici máme $n$ bílých a $m$ černých koulí. Postupně je taháme všechny ven (bez navrácení). Jaká je pravděpodobnost, že $k$-tá tažená koule je bílá?

   **Řešení**: Všech možností jak postupně vytahnout $m+n$ koulí z krabice je $(m+n)!$. Příznivé uspořádání vznikne tak, že na $k$-té místo dáme bílou kouli, což lze $n$ způsoby. Ostatní koule doplníme libovolně $(m+n-1)!$ způsoby.

$$P = \frac{n(m+n-1)!}{(m+n)!} = \frac{n}{m+n}.$$

9. Rozdělme $2n$ koulí náhodně do $n$ krabic ($n \geq 3$). Jaká je pravděpodobnost, že první krabice bude obsahovat právě 6 koulí? Čemu se tato pravděpodobnost blíží, když $n \to +\infty$?

   **Řešení**: Všech rozdělení je $n^{2n}$. Příznivé uspořádání vznikne vybráním 6 koulí, což lze $\binom{2n}{6}$ způsoby, a jejich umístěním do 1. krabice. Zbytek rozdělíme do zbylých $n-1$ krabic libovolně, a to lze $(n-1)^{2n-6}$ způsoby.

$$P = \binom{2n}{6} \frac{(n-1)^{2n-6}}{n^{2n}} \longrightarrow 2^6 e^{-2}/6!.$$

10. Rozmístěme $2n$ koulí označených čísly $1, 2, \dots, 2n$ po jedné náhodně do $2n$ krabic rovněž očíslovaných $1, 2, \dots, 2n$. Jaká je pravděpodobnost toho, že u každé krabice bude součet jejího čísla a čísla koule uvnitř sudý? Jaká je hodnota této pravděpodobnosti při $n \to \infty$?

    **Řešení**: Všech rozmístění je $(2n)!$. Aby součet čísla koule a krabice byl sudý, musí být buď obě čísla sudá nebo obě lichá. Rozdělíme koule se sudým číslem do krabic se sudým číslem, což lze $n!$ způsoby. Stejně po té rozdělíme $n!$ způsoby koule s lichým číslem do krabic s lichým číslem.

$$P = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \longrightarrow 0.$$

11. Mějme $n$ krabic a mějme $n+k$ koulí. Všechny tyto koule rozmístíme náhodně do krabic. Jaká je pravděpodobnost toho, že první krabice zůstala prázdná? K čemu se tato hodnota blíží při $n \to \infty$?

    **Řešení**: Všech rozmístění je $n^{n+k}$. Příznivá rozmístění jsou ta, u kterých používáme k rozmístění jen $n-1$ krabic.

$$P = \frac{(n-1)^{n+k}}{n^{n+k}} \longrightarrow e^{-1}.$$

12. $4n$ bílých a $n$ černých koulí je náhodně rozmístěno do $n$ krabic tak, že v každé krabici je právě 5 koulí. Položme

$$A = \{\text{v každé krabici jsou 4 bílé a 1 černá koule}\}.$$

    a) Spočtěte $P(A)$.
    b) Pro $n = 5$ určete pravděpodobnost, že všechny černé koule se ocitnou v jediné krabici.

    **Řešení**: a) Počet všech rozdělení $5n$ koulí do $n$ krabic zjistíme tak, že budeme postupně vybírat po 5 koulích a umísťovat je do krabic:

$$\binom{5n}{5}\binom{5n-5}{5}\binom{5n-10}{5}\cdots\binom{5}{5} = \frac{(5n)!}{(5!)^n}.$$

Stejně vytvoříme příznivá rozdělení. Do 1. krabice dáme 4 bílé z celkového počtu $4n$ bílých a 1 černou z $n$ černých, což lze $\binom{4n}{4}\binom{n}{1}$ způsoby. Do 2. krabice dáme 4 bílé z $4n-4$ bílých a 1 černou z $n-1$ černých. To lze $\binom{4n-4}{4}\binom{n-1}{1}$ způsoby, atd. Počet příznivých rozdělení je tak

$$\binom{4n}{4}\binom{n}{1}\binom{4n-4}{4}\binom{n-1}{1}\cdots\binom{4}{4}\binom{1}{1} = \frac{(4n)!\,n!}{(4!)^n}.$$

Takže

$$P = \frac{(5!)^n(4n)!\,n!}{(4!)^n(5n)!} = \frac{5^n n!(4n)!}{(5n)!}.$$

b) $P = 20!\,5!\,5/25! = 1/10626$.

13. Každou z $n$ různě obarvených tyčinek rozlomíme na dva díly, kratší a delší. Ze všech $2n$ vzniklých částí utvoříme dvojice. Jaká je pravděpodobnost, že

   a) v každé dvojici bude jeden kratší a jeden delší díl,

   b) každá dvojice bude tvořit původní tyčinku?

   **Řešení**: a) Počet všech rozdělení $2n$ částí do dvojic zjistíme tak, že budeme postupně vybírat po 2 kusech a umísťovat je do dvojic:

$$\binom{2n}{2}\binom{2n-2}{2}\binom{2n-4}{2}\cdots\binom{2}{2}=\frac{(2n)!}{2^n}.$$

   Stejně vytvoříme příznivá rozdělení. Do 1. dvojice dáme 1 dlouhou z celkového počtu $n$ dlouhých a 1 krátkou z $n$ krátkých, což lze $n^2$ způsoby. Do 2. dvojice dáme 1 dlouhou z $n-1$ dlouhých a 1 krátkou z $n-1$ krátkých, a to $(n-1)^2$ způsoby, atd. Počet příznivých rozdělení je tak $(n!)^2$. Takže

$$P=\frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}.$$

   b) Zde bude jiný počet příznivých rozdělení. Do každé dvojice k libovolně vybrané dlouhé části máme přesně jednu krátkou část na doplnění. Počet příznivých rozdělení je tak $n!$ a $P=2^n n!/(2n)!$.

14. Jaká je pravděpodobnost, že mezi $n$ náhodně zvolenými lidmi budou alespoň dva slavit narozenimy ve stejný den?

   **Řešení**: Každý může mít narozeniny v jednom z 365 dní. (Uvažujeme nepřestupný rok.) Počet všech rozložení narozenin $n$ lidí je tak $365^n$. Určíme pravděpodobnost jevu opačného než je v zadání úlohy, tj. zajímá nás počet takových rozložení narozenin, kdy každý z $n$ lidí má narozeniny v jiném dni. Těch je $365\cdot 364\cdot\ldots\cdot\big(365-(n-1)\big)$, (součin má $n$ činitelů). Tedy

$$P=1-\frac{365\cdot 364\cdot\ldots\cdot(365-n+1)}{365^n}=1-\frac{1}{365^n}\binom{365}{n}n!.$$

15. Z $n$ párů bot vybereme $2k$ jednotlivých kusů.

   (a) Jaká je pravděpodobnost, že jedna mezi vybranými nebude ani jeden pár?

   (b) Jaká je pravděpodobnost, že mezi vybranými bude přesně jeden pár?

   (c) Jaká je pravděpodobnost, že mezi vybranými budou přesně dva páry?

   **Řešení**: Všech výběrů $2k$ kusů z $2n$ bot je $\binom{2n}{2k}$.
   a) Příznivý výběr získáme takto: Z $n$ párů si napřed vybereme $2k$ párů, a to lze $\binom{n}{2k}$ způsoby. Pak z každého takto vybraného páru jednu botu - pravou nebo levou, což je možné dvěma způsoby. Tím počet výběrů bot, mezi kterými není žádný pár je

$$\binom{n}{2k}\overbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}^{2k}=\binom{n}{2k}2^{2k}.$$

   Hledaná pravděpodobnost je

$$P=\frac{\binom{n}{2k}2^{2k}}{\binom{2n}{2k}}.$$

b) Zvolíme si do výběru jeden celý pár. To lze $n$ způsoby. Zbývá vybrat z $n-1$ párů $2k-2$ bot. To je ale předchozí případ a) s $n-1$ místo $n$ a $2k-2$ místo $2k$. Tedy

$$P = \frac{n\binom{n-1}{2k-2}2^{2k-2}}{\binom{2n}{2k}}.$$

c) Zvolíme do výběru celé dva páry, což lze $\binom{n}{2}$ způsoby. Zbývá nám $n-2$ párů, ze kterých volíme $2k-4$ bot stejně jako v případu a). Takže

$$P = \frac{\binom{n}{2}\binom{n-2}{2k-4}2^{2k-4}}{\binom{2n}{2k}}.$$

16. Kniha o $k$ stranách obsahuje celkově $n$ tiskových chyb. Jaká je pravděpodobnost, že na 1. straně je $r_1$ chyb, na 2. straně je $r_2$ chyb, ... a na $k$-té straně je $r_k$ tiskových chyb? ($r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$.)

    **Řešení**: Každá chyba může být na jedné z $k$ stran. Tím je celkový počet rozmístění $n$ chyb na $k$ stran roven $k^n$. Příznivá rozdělení získáme, že na 1. stranu vybereme $r_1$ chyb, což lze $\binom{n}{r_1}$ způsoby. Na 2. stranu můžeme dát $r_2$ chyb $\binom{n-r_1}{r_2}$ způsoby atd. Počet příznivých rozmístění všech chyb je

$$\binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_2}\binom{n-r_1-r_2}{r_3}\cdots\binom{n-r_1-\cdots-r_{k-1}}{r_k} = \frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}.$$

    Odpověď je $P = n!/(r_1!\cdots r_k!\,k^n)$.

17. Uvažujme $n$ lidí mezi nimiž jsou zahrnuty i dvě osoby $A$ a $B$.

    (a) Jaká je pravděpodobnost, že při náhodném seřazení $n$ lidí do řady bude mezi osobou $A$ a $B$ stát právě $k$ lidí?

    (b) Jaká je pravděpodobnost, že při posazení $n$ lidí kolem kulatého stolu bude mezi $A$ a $B$ právě $k$ lidí?

    **Řešení**: a) Počet všech uspořádání $n$ lidí do řady je $n!$. Počet způsobů, jak do řady umístit osobu $A$, za ní $k$ volných míst a pak osobu $B$ je $n-k-1$. Protože $A$ a $B$ se mohou prohodit, vynásobíme předešlé číslo dvěma. Zbylých $n-2$ osob umístíme na zbylých $n-2$ míst libovolně, což lze $(n-2)!$ způsoby.

$$P = \frac{2(n-k-1)(n-2)!}{n!} = \frac{2(n-k-1)}{n(n-1)}.$$

    b) Počet rozmístění $n$ lidí v řadě je $n$-krát větší než počet rozmístění $n$ lidí kolem kulatého stolu: Máme-li osoby rozesazené kolem stolu, zvolíme jednu z nich jako první a od ní pak ostatní odpočítáváme, jako by stáli v řadě. Protože volba první osoby může být uskutečněná $n$ způsoby, získáme z jednoho rozesazení kolem stolu $n$ různých řad. Počet všch rozesazení $n$ lidí kolem kulatého stolu je tak $n!/n = (n-1)!$. Příznivá rozesazení získáme následovně. Osoby $A$ a $B$ posadíme tak, aby mezi nimi bylo $k$ volných židlí. Zbylých $n-2$ osob rozmístíme na $n-2$ volných míst $(n-2)!$ způsoby. Poslední, co musíme vzít v úvahu je fakt, že prohodíme-li osoby $A$ a $B$ získáme nové rozesazení. Toto ovšem platí s výjimkou jednoho případu: Když $k = (n-2)/2$, sedí $A$ a $B$ přesně naproti sobě a jejich prohozením nezískáváme nové rozesazení. Závěr:

$$P = \frac{2(n-2)!}{(n-1)!} = \frac{2}{n-1} \quad \text{pro} \quad k \neq \frac{n-2}{2},$$

$$P = \frac{(n-2)!}{(n-1)!} = \frac{1}{n-1} \quad \text{pro} \quad k = \frac{n-2}{2}.$$

18. V sadě $n$ výrobků je 5 vadných. Vybereme náhodně $k$ z celé sady. Jaká je pravděpodobnost, že vzorek obsahuje právě jeden vadný výrobek, jestliže

    (a) výběr je bez navrácení.

    (b) výběr je s navrácením.

    **Řešení**: (a) Počet všech možných výběrů $k$-tic z $n$ výrobků je $\binom{n}{k}$. Příznivý případ je, když v $k$-tici je přesně jeden vadný výrobek. Ten můžeme vybrat z 5 vadných a zbylých $k-1$ doplnit z $n-5$ výrobků bez závady. To lze $5\binom{n-5}{k-1}$. Výsledek je

$$P = \frac{5\binom{n-5}{k-1}}{\binom{n}{k}}.$$

(b) Počet všech možných výběrů $k$-tic z $n$ výrobků s navrácením je $n^k$. Příznivý případ je, když v $k$-tici je přesně jeden vadný výrobek. Ten můžeme vybrat z 5 vadných a umístíme ho na jedno z $k$ míst ve vybrané $k$-tici, což lze $5k$ způsoby. Zbylých $k-1$ výrobků doplníme z $n-5$ výrobků bez závady, což dává $(n-5)^{k-1}$ způsobů. Výsledek je

$$P = \frac{5k(n-5)^{k-1}}{n^k} = \frac{5k}{n}\left(1-\frac{5}{n}\right)^{k-1}.$$

19. Mezi $N$ míčky je $n$ bílých a $N-n$ modrých. Náhodně vybereme bez navrácení $K$ míčků z celkového počtu.

    (a) Jaká je pravděpodobnost, že mezi vybranými bude $k$ bílých?

    (b) Jak se změní výsledek, budeme-li provádět výběr s navrácením každého taženého míčku?

    **Řešení**: (a) Počet všech možných výběrů $K$-tic z $N$ míčků je $\binom{N}{K}$. Příznivý případ je, když v $K$-tici je přesně $k$ bílých míčků. Ty můžeme vybrat z $n$ bílých $\binom{n}{k}$ způsoby a zbylých $K-k$ doplnit z $N-n$ modrých. To lze $\binom{n}{k}\binom{N-n}{K-k}$ způsoby. Výsledek je

$$P = \frac{\binom{n}{k}\binom{N-n}{K-k}}{\binom{N}{K}}.$$

(b) Počet všech možných výběrů $K$-tic z $N$ výrobků s navrácením je $N^K$. Příznivý případ je, když v $K$-tici je přesně $k$ bílých míčků. Ty lze vybrat z $n$ bílých $n^k$ způsoby a umístit je do $K$-tice $\binom{K}{k}$ způsoby. Zbylých $K-k$ míčků doplníme z $N-n$ modrých a to $(N-n)^{K-k}$ způsoby. Výsledek je

$$P = \frac{n^k\binom{K}{k}(N-n)^{K-k}}{N^K} = \binom{K}{k}\left(\frac{n}{N}\right)^k\left(1-\frac{n}{N}\right)^{K-k}.$$

Jiný způsob výpočtu je, když si uvědomíme, že se jedná o Bernoulliho schéma s $K$ pokusy vybírání míčků do $K$-tice, kde úspěch je výběr bílého míčku. Pravděpodobnost úspěchu je $n/N$ a tedy pravděpodobnost $k$ úspěchů z $K$ pokusů je daná

$$P = \binom{K}{k}\left(\frac{n}{N}\right)^k\left(1-\frac{n}{N}\right)^{K-k}.$$

20. Nezkušený zaměstnanec vybírá vzorek o $n$ kusech tak, že si zapíše číslo náhodně zvoleného kusu a kus opět vrátí do zásobníku obsahujícího celkově $N$ kusů. Jaká je pravděpodobnost, že jeho seznam obsahuje alespoň dvě duplicitní položky?

**Řešení**: Uvažujme jev opačný, tj. seznam obsahuje navzájem různé položky. Počet všech možných zápisů délky $n$, kde položky mohou být brány z $N$ možností je $N^n$. Chceme-li, aby všechny položky byly navzájem různé, zvolíme si $n$ různých položek z celkového počtu $N$, což lze $\binom{N}{n}$ způsoby. Tyto položky pak mohou být na seznamu v různých pořadích a to dává dalších $n!$ možností. Celkově

$$P = 1 - \binom{N}{n}\frac{n!}{N^n}.$$

21. $A$ hodí 3 krát mincí, u níž je pravděpodobnost, že padne panna $p_A$. $B$ hodí dvakrát mincí, u které je pravěpodobnost panny $p_B$. $A$ vyhraje, pokud mu padne větší počet pannen. Jinak vyhrává $B$.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že vyhraje $A$?

(b) Ukažte, že hra je spravedlivá, pokud jsou mince symetrické.

**Řešení**: (a) Vítězství hráče $A$ nastane v každém z následujících tří případů. Buď hráči $A$ padnou tři panny (pak na hráči $B$ nezáleží), což má pravděpodobnost $p_A^3$. Nebo $A$ hodí dvakrát pannu a jednou orla, což má pravděpodobnost $3p_A^2(1-p_A)$, a v tom případě nesmí mít $B$ dvakrát pannu, $1-p_B^2$. Pravděpodobnost tohoto případu je tak $3p_A^2(1-p_A)(1-p_B^2)$. Zbývá poslední možnost, že $A$ hodí jen jednu pannu a dvakrát orla, $3p_A(1-p_A)^2$, a $B$ jenom dvakrát orla, $(1-p_B)^2$, což má celkově pravděpodobnost $3p_A(1-p_A)^2(1-p_B)^2$. Sečtením všech tří případů dostaneme

$$P = p_A^3 + 3p_A^2(1-p_A)(1-p_B^2) + 3p_A(1-p_A)^2(1-p_B)^2.$$

(b) Pro symetrické mince je $p_A = p_B = 1/2$ a výsledek případu (a) je $P = 1/2$.

22. Do $n$ očíslovaných krabic náhodně rozmístíme $n$ očíslovaných míčků.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že žádná krabice nebude prázdná?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že přesně jedna krabice bude prázdná?

(c) Rozmístíme nyní $n+1$ míčků. Jaká je pravděpodobnost, že přesně jedna krabice bude prázdná?

(d) Rozmístíme nyní $n+2$ míčků. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň jedna krabice bude prázdná?

**Řešení**: (a) Počet všech možných rozmístění je $n^n$. Příznivá jsou ta rozmístění, kdy v každé krabici je jen jeden míček a těch je $n!$. Takže $P = n!/n^n$.

(b) Při tomto rozmístění musí být jedna krabice prázdná, jedna krabice obsahující dva míčky a zbylých $n-2$ krabic má po jednom míčku. Počet těchto rozdělení získáme tak, že si zvolíme krabici, která bude prázdná ($n$ možností), a která bude obsahovat dva míčky ($(n-1)$ možností). Do této krabice vybereme z $n$ míčků dva, což lze $\binom{n}{2}$ způsoby a zbylých $(n-2)$ míčků rozdělíme po jednom do zbylých $(n-2)$ krabic $(n-2)!$ způsoby. Celkově

$$P = \frac{n(n-1)\binom{n}{2}(n-2)!}{n^n} = \binom{n}{2}\frac{n!}{n^n}.$$

(c) Počet všech rozmístění je $n^{n+1}$. Příznivá rozložení jsou dvojího typu. Buď existuje krabice se třemi míčky a $(n-2)$ krabic má po jednom míčku nebo existují dvě krabice po dvou míčkách a $(n-3)$ krabic po jednom míčku. Rozložení prvního typu získáme, že si zvolíme krabici, která bude prázdná ($n$ způsoby) a krabici se třemi míčky ($(n-1)$ způsoby). Do té vybereme tři míčky z $(n+1)$, což lze $\binom{n+1}{3}$ způsoby. Do zbylých $(n-2)$ krabic rozdělíme míčky po jednom a to $(n-2)!$ možnostmi. Celkově máme

$$n(n-1)\binom{n+1}{3}(n-2)! = \binom{n+1}{3}n!$$

rozdělení prvního typu. Pro druhý typ postupujeme podobně. Zvolíme krabici, která bude prázná ($n$ možností) a dvě krabice, které budou obsahovat po dvou míčcích ($\binom{n-1}{2}$ možností). Do první krabice, která má obsahovat dva míčky dáme dva míčky z $(n+1)$, což lze $\binom{n+1}{2}$ způsoby. Další dva míčky ze zbylých ($\binom{n-1}{2}$ možností) dáme do druhé připravené krabice. Nakonec nám zůstalo $(n-3)$ míčků, které rozdělíme do $(n-3)$ krabic $(n-3)!$ způsoby. Takže počet rozmístění druhého typu je

$$n\binom{n-1}{2}\binom{n+1}{2}\binom{n-1}{2}(n-3)! = \frac{n}{4}\binom{n-1}{2}(n+1)!.$$

Pravděpobnost, že přesně jedna krabice zůstane prázdná je tak

$$P = \frac{1}{n^{n+1}}\left(\binom{n+1}{3}n! + \frac{n}{4}\binom{n-1}{2}(n+1)!\right).$$

(d) Budeme uvažovat jev opačný, tj. že žádná krabice nezůstala prázdná. Počet všech rozmístění je zde $n^{n+2}$. Příznivá rozložení jsou dvojího typu. Buď existuje krabice se třemi míčky a $(n-1)$ krabic má po jednom míčku nebo existují dvě krabice po dvou míčkách a $(n-2)$ krabic po jednom míčku. Rozložení prvního typu získáme, že si zvolíme krabici, která bude obsahovat tři míčky ($n$ způsoby). Do té vybereme tři míčky z $(n+2)$, což lze $\binom{n+2}{3}$ způsoby. Do zbylých $(n-1)$ krabic rozdělíme míčky po jednom a to $(n-1)!$ možnostmi. Celkově máme

$$n\binom{n+2}{3}(n-1)! = \binom{n+2}{3}n!$$

možností. Pro druhý typ postupujeme podobně. Zvolíme dvě krabice, které budou obsahovat po dvou míčkách ($\binom{n}{2}$ možností). Do první z nich dáme dva míčky z $(n+2)$, což lze $\binom{n+2}{2}$ způsoby. Další dva míčky ze zbylých ($\binom{n}{2}$ možností) dáme do druhé připravené krabice. Nakonec nám zůstalo $(n-2)$ míčků, které rozdělíme do $(n-2)$ krabic $(n-2)!$ způsoby. Takže počet rozmístění druhého typu je

$$\binom{n}{2}\binom{n+2}{2}\binom{n}{2}(n-2)! = \binom{n}{2}\frac{(n+2)!}{4}.$$

Celkově máme pro hledanou pravděpodobnost $P$

$$P = 1 - \frac{1}{n^{n+2}}\left(\binom{n+2}{3}n! + \binom{n}{2}\frac{(n+2)!}{4}\right).$$

23. Do $N$ očíslovaných krabic se náhodně rozdělí $n$ očíslovaných míčků. Jaká je pravděpodobnost, že v $K$-té krabici bude $k$ míčků?

    **Řešení**: Pokud si povšimneme, že se jedná o Bernoulliho schéma, kde pokus je umístění míčku do jedné z $N$ krabic a úspěch je umístění míčku přesně do $K$-té krabice (pravděpodobnost úspěchu je tedy $1/N$), pak podle vzorce pro pravděpodobnost $k$ úspěchů v sérii $n$ pokusů máme

$$P = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{N}\right)^k\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-k}.$$

    Jiné řešení: Počet všech možných umístění $n$ míčků do $N$ krabic je $N^n$. Příznivé rozložení dostaneme, že vezmene $k$ míčků z celkového počtu $n$ (což, lze $\binom{n}{k}$ způsoby) a dáme je do $K$-té krabice. Zbylých $(n-k)$ míčků rozdělíme libovolně do zbylých $(N-1)$ krabic a to $(N-1)^{n-k}$ způsoby. Celkově

$$P = \frac{\binom{n}{k}(N-1)^{n-k}}{N^n} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{N}\right)^k\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-k}.$$

24. Ve městě žije $n+1$ obyvatel. Jeden z občanů začne šířit fámu a to tak, že ji sdělí náhodně vybranému obyvateli. Ten ji opět sdělí dalšímu náhodně vybranému obyvateli (může to být i ten, od koho se ji dozvěděl). Tak se fáma šíří městem.

    (a) Jaká je pravděpodobnost, že fáma bude $k$ krát předána, aniž by se vrátila k původci?

    (b) Jaká je pravděpodobnost, že fáma bude $k$ krát předána, aniž by se vrátila k někomu, kdo ji už slyšel?

    Jak se změní výsledek, když místo jednoho obyvatele si v každém kroku může osoba předávající fámu vybrat náhodně $r$ posluchačů?

    **Řešení**: (a) Počet všech způsobů, jak se fáma může šířit během $k$ kroků je $n^k$, neboť v každém kroku může být sdělena jednomu z $n$ obyvatel. Příznivé šíření fámy je takové, že z dalších kroků je vyloučen její původce: v 1. kroku ji předá jednomu z $n$ obyvatel a v dalších $(k-1)$ krocích je pouze $(n-1)$ možností komu ji předat, neboť původce je nyní vyloučen. Počet příznivých šíření je $n(n-1)^{k-1}$. Celkově

$$P = \frac{n(n-1)^{k-1}}{n^k} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}.$$

    (b) Počet všech způsobů šíření je stejný jako v případě (a), tj. $n^k$. Příznivá šíření: v 1. kroku máme na výběr z $n$ obyvatel. Ve 2. kroku už jen $(n-1)$ obyvatel neboť kdo fámu již slyšel je vyloučen z další účasti na šíření, ... atd, a v posledním $k$-tém kroku je pouze $(n-k+1)$ obyvatel, kteří fámu ještě neslyšeli. Výsledná pravděpodobnost je

$$P = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = \binom{n}{k}\frac{k!}{n^k}.$$

    Pro $r$: (a) $\dfrac{\binom{n-1}{r}^{r+r^2+\cdots r^{k-1}}}{\binom{n}{r}^{r+r^2+\cdots r^{k-1}}}$, (b) $\dfrac{\prod_{j=1}^{k-1}\prod_{i=1}^{r^j}\binom{n-ir-r^2-\cdots-r^j}{r}}{\binom{n}{r}^{r+r^2+\cdots+r^{k-1}}}$.

25. Tři hráči $A$, $B$ a $C$ hrají karty způsobem, že vždy dva se účastní hry a třetí stojí mimo. Kdo ve hře prohraje, je nahrazen tím, který nehrál. Tento systém pokračuje tak dlouho, dokud jeden z hráčů nevyhraje dvakrát za sebou. Pak se stává celkovým vítězem. Všichni hráči jsou v kartách stejně dobří. Začínají hrát hráči $A$ a $B$.

(a) Jaké jsou pravděpodobnosti celkového vítězství pro $A$, $B$ a $C$?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že hra skončí nejpozději v $k$-tém kole?

Jak se změní řešení, předpokládáme-li, že $A$ a $B$ jsou stejně dobří, ale nad hráčem $C$ oba vyhrávají s pravděpodobností $p$?

**Řešení**: a) Průběh hry budeme značit posloupností výherců v jednotlivých kolech. Např. $ACBB$ označuje hru skládající se ze čtyř kol, v prvním vyhrál $A$, který pak hrál s hráčem $C$ a vyhrál hráč $C$. Pak $C$ hrál s $B$ a vyhrál $B$ a nakonec hrál $B$ opět s $A$ a vyhrál znovu $B$. Tím byla série her ukončena.

Jsou dva typy serií, kdy vyhraje hráč $A$:

(a) $ACB\,ACB \cdots ACB\,AA$, kde se skupina $ACB$ opakuje $k$ krát, $k = 0, 1, \ldots$;

(b) $BCA\ BCA\ \cdots BCA\ A$, kde se skupina $BCA$ opakuje $k$ krát, $k = 1, 2, \ldots$.

Výsledná pravděpodobnost se spočte sečtením pravděpodobností všech uvedených případů.

$$P(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^k \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^k \frac{1}{2} = \frac{2}{7} + \frac{1}{14} = \frac{5}{14}.$$

Ze symetrie $P(A) = P(B) = 5/14$ a doplňková pravděpodobnost je $P(C) = 4/14$. Pro obecnější případ si stačí uvědomit, že pravděpodobnost skupiny $ACB$ i $BCA$ je rovna $\frac{1}{2}(1-p)p$. Pak

$$P(A) = P(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}(1-p)p\right)^k \frac{1}{2}\,p + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}(1-p)p\right)^k \frac{1}{2} = \frac{p}{2}\,\frac{3-p}{2-p+p^2}.$$

b) Nejkratší série jsou dvě $AA$ a $BB$ a tato série má pravděpodobnost $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$. Pro tři kola máme dvě série $ACC$ a $BCC$ a pravdědobnost $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$, pro čtyři opět dvě série $ACBB$ a $BCAA$ a příslušnou pravděpodobnost $\frac{1}{16}+\frac{1}{16}$, atd. Má-li série přesně $k \geq 2$ kol, má tedy pravděpodobnost $2^{-k+1}$. Sečtením těchto pravděpodobností dostaneme odpověď

$$P = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdots + \frac{1}{2^{k-1}} = 1 - \frac{1}{2^{k-1}}.$$

V obecném případě je jednodušší spočítat pravděpodobnost jevu opačného. Výsledek závisí na tvaru čísla $k$:

$$P = 1 - 2\left(\frac{1}{2}(1-p)p\right)^i \quad \text{pro } k = 3i,$$
$$P = 1 - \left(\frac{1}{2}(1-p)p\right)^i \quad \text{pro } k = 3i+1,$$
$$P = 1 - (p-1)\left(\frac{1}{2}(1-p)p\right)^i \quad \text{pro } k = 3i+2.$$

26. Mějme minci, u níž je pravděpodobnost panny rovna $p \in \langle 0, 1\rangle$ a orla $1-p$. Házíme tak dlouho, dokud nepadne za sebou dvakrát totéž.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že série hodů skončí nejpozději v šestém hodu?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že série bude mít sudý počet hodů?

**Řešení**: (a) Uvažujme opačný jev, tj. série má minimálně 6 hodů. Aby tomu tak bylo nesmí za sebou padnout dvakrát totéž, takže máme jen dva možné případy: $OPOPOP$ nebo $POPOPO$. Oba dva mají stejnou pravděpodobnost $p^3(1-p)^3$. Takže

$$P = 1 - 2p^3(1-p)^3.$$

(b) Má-li mít série sudý počet hodů, pak poslední dva hody jsou buď $PP$ nebo $OO$. V předchozích hodech se pak musí střídat $P$ a $O$ a to tak, že jsou jen dvě možnosti jak série může vypadat: buď $POPO \dots POPP$ nebo $OPOP \cdots OPOO$. Je-li délka série $2n$, pak první z nich má pravděpodobnost $p^{n+1}(1-p)^{n-1}$ a druhá $p^{n-1}(1-p)^{n+1}$. Takže

$$\begin{aligned} P &= \sum_{n=1}^{\infty} \Big( p^{n+1}(1-p)^{n-1} + p^{n-1}(1-p)^{n+1} \Big) \\ &= p^2 \sum_{n=1}^{\infty} \big(p(1-p)\big)^{n-1} + (1-p)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \big(p(1-p)\big)^{n-1} \\ &= \frac{p^2}{1-p(1-p)} + \frac{(1-p)^2}{1-p(1-p)} = \frac{p^2 + (1-p)^2}{1-p(1-p)}. \end{aligned}$$

27. V krabici jsou bílé a černé koule. Provedeme dvakrát náhodný výběr, přičemž po každém tahu kouli opět vrátíme do krabice. Označme

$$A = \{\text{obě tažené koule jsou téže barvy}\}.$$

   a) Ukažte, že $P(A) \geq \frac{1}{2}$.
   b) Spočtěte $P(A)$ v případě, že bychom tažené koule do krabice nevraceli. Platí i v tomto případě, že $P(A) \geq \frac{1}{2}$?

**Řešení**: (a) Označme si počet bílých koulí jako $n$ a černých $m$. Pak

$$P(A) = \frac{m^2 + n^2}{(m+n)^2}.$$

Protože pro libovolná $m, n$ platí $2mn \leq m^2 + n^2$, je $P(A) \geq \frac{1}{2}$. Pro případ (b) je pravděpodobnost

$$P(A) = \frac{m(m-1) + n(n-1)}{(m+n)(m+n-1)}$$

a to je např. pro $m = n = 2$ rovno $1/3$.

28. Do $k$ krabic rozmístíme náhodně $n$ míčků.

   (a) Jaká je pravděpodobnost, že poslední krabice zůstala prázdná?
   (b) Jaká je pravděpodobnost, že nějaký míček se dostal do první nebo do poslední krabice?

**Řešení**: Každý míček má $k$ možností, kam ho lze umístit. Proto počet všech možných rozmístění je $k^n$.

(a) Máme-li zakázánu poslední krabici, je počet možností, jak umístit míček $k-1$, a tedy

$$P = \frac{(k-1)^n}{k^n}.$$

(b) Podíváme se na opačný jev, tj. že první a poslední krabice zůstaly prázdné. V tom případě máme jen $k-2$ možností, kam umísťovat míčky, a tak

$$P = 1 - \frac{(k-2)^n}{k^n}.$$

29. Ve skladovacím boxu je $n$ monočlánků, mezi nimiž je zamícháno $k$ vybitých monočlánků, $k < n$. Postupně je vybíráme z boxu bez navrácení a testujeme, je-li monočlánek vybitý či nikoli.

   (a) Jaká je pravděpodobnost, že poslední vytažený monočlánek bude nevybitý?

   (b) Jaká je pravděpodobnost, že poslední nevybitý monočlánek vytahneme jako třetí od konce?

   **Řešení**: (a) Výsledek jedné série vytahování monočlánků si můžeme zapsat jako posloupnost $n$ symbolů, např. $NVV \dots NN$, kde $V$ označuje vybitý monočlánek a $N$ monočlánek nabitý. Počet symbolů $V$ je $k$ a počet symbolů $N$ je $n-k$. Všech takových $n$-tic je $\binom{n}{k}$. Příznivý výběr je, když $n$-tice končí symbolem $N$. Takové uspořádání dostaneme, že na poslední místo v $n$-tici dáme $N$ a ze zbylých $n-1$ míst vybereme $\binom{n-1}{k}$ způsoby $k$-tice, které obsadíme symboly $V$. Takže

$$P = \frac{\binom{n-1}{k}}{\binom{n}{k}} = \frac{n-k}{n}.$$

   (b) Příznivý výběr je v tomto případě $n$-tice zakončená $\dots NVV$. Do prvních $n-3$ neobsazených míst můžeme umístit $\binom{n-3}{k-2}$ způsoby $k-2$ symbolů $V$. Odtud máme

$$P = \frac{\binom{n-3}{k-2}}{\binom{n}{k}} = \frac{k(k-1)(n-k)}{n(n-1)(n-2)}.$$

## Podmíněná pravděpodobnost

1. Hodíme dvěma kostkami, červenou a zelenou. Označíme $A$ jev „na červené padla $3, 4$ nebo 5“, $B$ jev „na zelené padla 1 nebo 2“, $C$ jev „součet bodů je 7“. Ukažte, že jevy $A, B, C$ jsou nezávislé.

2. Hodíme tři kostky. Jaká je pravděpodobnost, že padla alespoň jedna šestka, víme-li, že padla navzájem různá čísla?

   **Řešení**: Položíme $A = \{\text{alespoň jedna } 6\}$ a $B = \{\text{navzájem různá čísla}\}$. Pak $P(B) = 6 \cdot 5 \cdot 4/6^3$ a $P(A \cap B) = 3 \cdot 5 \cdot 4/6^3$, takže

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2}.$$

3. Předpokládáme, že narození chlapce nebo děvčete má stejnou pravděpodobnost. Jaká je pravděpodobnost, že v rodině se dvěma dětmi jsou oba chlapci, víme-li, že

   (a) alespoň jedno z dětí je chlapec.

   (b) první dítě je chlapec.

   **Řešení**: (a) Položíme $A = \{\text{oba chlapci}\}$ a $B = \{\text{alespň jeden chlapec}\}$. Pak $P(B) = 1 - 1/4 = 3/4$ a $P(A \cap B) = P(A) = 1/4$. Takže $P(A|B) = 1/3$.

   (b) Zde bude jev $B = \{\text{první dítě je chlapec}\}$. Pak $P(B) = 1/2$ a $P(A \cap B) = P(A) = 1/4$. Tím $P(A|B) = 1/2$.

4. Zásilka 24 produktů obsahuje 13 vadných. Je rozdělena do dvou stejných skupin.

   (a) Jaká je pravděpodobnost, že jedna skupina obsahuje jen vadné produkty?

(b) Produkty jsou rozděleny tak, že jedna skupina se skládá ze samých vadných výrobků. Náhodně zvolíme skupinu a produkt z ní. Je vadný. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně zvolený produkt z druhé skupiny bude také vadný?

**Řešení**: (a) Počet všech rozdělení 24 produktů do dvou stejných skupin je $\binom{24}{12}$. Příznivá rozdělení dostaneme, že buď do první nebo do druhé skupiny vybíráme pouze z 13-ti vadných produktů, což je $2\binom{13}{12}$ způsobů. Takže

$$P = \frac{2\binom{13}{12}}{\binom{24}{12}}.$$

(b) Budeme potřebovat následující jevy:

$$\begin{aligned} C &= \{\text{náhodně zvolená skupina obsahuje jen vadné produkty}\}, \\ B &= \{\text{produkt zvolený z náhodně vybrané skupiny je vadný}\}, \\ A &= \{\text{produkt zvolený z druhé skupiny je vadný}\}. \end{aligned}$$

V tomto označení máme zjistit $P(A|B)$. Pro výpočet $P(A \cap B)$ a $P(B)$ musíme použít vzorec pro úplnou pravděpodobnost.

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|C)P(C) + P(B|\bar{C})P(\bar{C}) = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{24}, \\ P(A \cap B) &= P(A \cap B|C)P(C) + P(A \cap B|\bar{C})P(\bar{C}) = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Odtud

$$P(A|B) = \frac{2}{13}.$$

5. V krabici je jeden míček barvy bílé nebo černé. Přidáme k němu jeden bílý míček a pak z krabice náhodně jeden míček vytahneme. Je bílý. Jaká je pravděpodobnost, že na počátku byl míček v krabici také bílý?

   **Řešení**: Položíme $A = \{\text{původní míček je bílý}\}$ a $B = \{\text{tažený míček je bílý}\}$. Chceme vypočítat $P(A|B)$. Víme, že $P(B|A) = 1$, $P(B|\bar{A}) = 1/2$ a $P(A) = 1/2$. Podle Bayeseva vzorce dostaneme

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})} = \frac{2}{3}.$$

6. Házíme kostkou tak dlouho dokud nepadne šestka.

   (a) Nepadla-li šestka při prvním hodu, jaká je pravděpodobnost, že nepadne ani při dalších dvou?

   (b) Víme-li, že počet potřebných hodů byl sudý, jaká je pravděpodobnost, že byl roven dvěma?

   **Řešení**: (a) Protože hody jsou nezávislé (a tedy výsledek prvního hodu nemá vliv na další hody) je pravděpodobnost rovna

$$P = \frac{5}{6}\frac{5}{6} = \frac{25}{36}.$$

   (b) Položíme $A = \{\text{počet hodů je } 2\}$ a $B = \{\text{počet hodů je sudý}\}$. Chceme vypočítat $P(A|B)$.

$$P(A \cap B) = P(A) = \frac{5}{6}\frac{1}{6} = \frac{5}{36}.$$

Zbývá zjistit $P(B)$. Musíme sečíst pravděpodobnosti, že šestka padla poprvé ve druhém hodu, ve čtvrtém hodu, v šestém hodu, ... atd. Tedy

$$P(B) = \frac{5}{6}\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^5 \frac{1}{6} + \cdots = \frac{5}{11}.$$

Odtud dostaneme výsledek $P(A|B) = 11/36$.

7. V koši je $n$ bílých a $m$ černých míčků. Náhodně vytahneme jeden. Vrátíme ho zpět a přidáme do koše $k$ míčků téže barvy, jakou měl tažený míček. Tento postup opakujeme. Jaká je pravděpodobnost, že při $j$-tém tahu vytahneme bílý míček?

   **Řešení**: Vyřešíme případ pro $j = 2$. Označíme si

$$\begin{aligned} A &= \{\text{tažený míček v 1. tahu je bílý}\} \\ B &= \{\text{tažený míček ve 2. tahu je bílý}\}. \end{aligned}$$

   Chceme vypočítat $P(B)$. Za zadání známe následující pravděpodobnosti:

$$\begin{aligned} P(B|A) &= (n+k)/(m+n+k), \quad P(A) = n/(m+n), \\ P(B|\bar{A}) &= n/(m+n+k), \quad P(\bar{A}) = m/(m+n). \end{aligned}$$

   Podle vzorce o úplné pravděpodobnosti dostaneme

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A)P(A) + P(B\bar{A})P(\bar{A}) \\ &= \frac{n+k}{m+n+k}\,\frac{n}{m+n} + \frac{n}{m+n+k}\,\frac{m}{m+n} = \frac{n}{m+n}. \end{aligned}$$

   Protože po provedení tahu jsou pravděpodobnosti vytažení bílého či černého míčku stejné jako na počátku, výsledek se opakováním taků nemění a odpověď je, že při $j$-tém tahu je pravděpodobnost vytažení bílého míčku $n/(m+n)$.

8. Stroj má 2 komponenty $A$ a $B$, které fungují nezávisle na sobě. Stroj pracuje, jsou-li obě komponenty funkční. Víme, že $A$ má spolehlivost 98% a stroj má spolehlivost 95%. Jakou spolehlivost má komponenta $B$?

   **Řešení**: Je-li $A$, resp. $B$ označují jevy, že komponenty $A$, resp. $B$ jsou funkční, pak máme, že $P(A) = 0.98$ a $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.95$. Odtud $P(B) = 0.97$.

9. Máme $n$ bílých a $n$ černých míčků. Jak je máme rozdělit do dvou krabic, aby při náhodné volbě krabice a vytažení náhodného míčku z této krabice byla pravděpodobnost, že míček je bílý maximální?

   **Řešení**: [1 bílý, 0 černých], [$(n-1)$ bílých, $n$ černých].

10. Házíme $n$ krát mincí, kde pravděpodobnost panny je $p$.

    (a) Jaká je pravděpodobnost, že ve čtvtém hodu padla panna, víme-li, že v celé sérii padlo $k$ panen?

    (b) Označíme jevy $A = \{\text{v prvním hodu padla panna}\}$ a $B_k = \{\text{v sérii padlo } k \text{ panen}\}$. Pro jaké hodnoty $k$ jsou jevy $A$ a $B_k$ nezávislé?

    **Řešení**: a) $k/n$, b) $k = pn$.

11. Házíme nesymetrickou mincí s pravděpodobností panny rovnou $p$ tak dlouho, dokud nám nepadne panna.

    (a) Nepadla-li panna v prvních dvou hodech, jaká je pravděpodobnost, že nepadne ani v následujících třech hodech?

(b) Víme-li, že potřebný počet hodů byl lichý, jaká je pravděpodobnost, že byl roven třem?

**Řešení**: a) $(1-p)^3$, b) $(1-p)^2 p(2-p)$

12. V souboru $n$ mincí je jedna mající na obou stranách pannu. Ostatní mince jsou správné. Náhodně zvolíme minci a šestkrát s ní hodíme. Pokaždé padla panna. Jaká je pravděpodobnost, že tato mince má znak panny na obou stranách?

    **Řešení**: $2^6/(2^6+n-1)$.

13. V každé ze dvou krabic se nacházejí dvě mince. V první krabici jsou to mince u nichž je pravděpodobnost, že padne panna rovna $p_1$ a ve druhé krabici mince, kde pravděpodobnost panny je $p_2$, $p_1 \neq p_2$. Máme na výběr dva postupy:

    (a) Nádodně zvolíme krabici a hodíme oběma mincemi, které se v ní nachází.

    (b) Z každé krabice náhodně vybereme po jedné minci a hodíme s nimi.

    Výhra nám přináleží, padne-li na obou mincích panna. Který postup je výhodnější?

    **Řešení**: a) $(p_1^2+p_2^2)/2$, b) $p_1p_2$. Postup a) je výhodnější.

14. Vzácná mince spadla do jednoho z $n$ kontejnerů se šrotem. Pravděpodobnost, že zapadla do $i$-tého kontejneru je $p_i$, $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$. Je-li mince v $i$-tém kontejneru a hledáme-li ji tam, pak ji nalezneme s pravděpodobností $q_i$. Jaká je pravděpodobnost, že mince je v $i$-tém kontejneru, když jsme ji nenašli v $j$-tém kontejneru?

    **Řešení**: $p_i/(1-p_jq_j)$ pro $i \neq j$ a $(1-q_i)p_i/(1-p_iq_i)$ pro $i=j$.

15. Osoby $A$, $B$ a $C$ lžou s pravděpodobností $p$ a mluví pravdu s pravděpodobností $1-p$ a to nezávisle na sobě. Osoba $C$ pronesla jistý výrok. Jaká je pravděpodobnost, že nebyl pravdivý, víme-li, že osoba $A$ prohlásila: „$B$ mi sdělil, že $C$ lhal.“

    **Řešení**:$(p^2+(1-p)^2)/(3p^2+(1-p)^2)$.

16. Máme tři krabice $K_1$, $K_2$ a $K_3$. Složení krabice $K_i$ je $n_i$ bílých míčků a $m_i$ černých míčků, $i=1,2,3$.

    (a) Z náhodně zvolené krabice vytahneme dva míčky. Jsou bílý a černý. Jaká je pravděpodobnost, že byly taženy z krabice $K_i$, $i=1,2,3$?

    (b) Z krabice $K_1$ přendáme náhodně jeden míček do $K_2$ a pak opět jeden míček zpět do $K_1$. Jaká je pravděpodobnost, že složení $K_1$ a $K_2$ zůstali stejné?

    (c) Z krabice $K_1$ přendáme náhodně jeden míček do $K_2$, z $K_2$ jeden míček do $K_3$ a pak z $K_3$ jeden míček zpět do $K_1$. Jaká je pravděpodobnost, že složení všech krabic zůstane stejné?

    **Řešení**: (a)$\dfrac{n_im_i}{\binom{n_i+m_i}{2}} \Big/ \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \dfrac{n_jm_j}{\binom{n_j+m_j}{2}}$, (b) $\dfrac{n_1(n_2+1)+m_1(m_2+1)}{(n_1+m_1)(n_2+m_2+1)}$,
    (c) $\dfrac{n_1(n_2+1)(n_3+1)+m_1(m_2+1)(m_3+1)}{(n_1+m_1)(n_2+m_2+1)(n_3+m_3+1)}$.

17. Krabice obsahuje lístečky očíslované $1,\ldots,n$. Náhodně vytáhneme jeden. Má-li číslo 1, necháme si ho. Jinak ho vrátíme do krabice. Vytáhneme další lístek. Jaká je pravděpodobnost, že má číslo 2?

    **Řešení**: $\dfrac{1}{n}\Big(\dfrac{1}{n-1}+\dfrac{n-1}{n}\Big)$.

18. Máme 16 zlatých mincí, z nichž 7 je pouze na povrchu pozlacených, zbylé jsou pravé. Mince rozdělíme do dvou stejně velkých skupin.
    (a) Jaká je pravděpodobnost, že jedna ze skupin bude obsahovat pouze pravé mince?
    (b) Předpokládejme, že mince jsou rozděleny tak, že jedna ze skupin obsahuje pouze pravé mince. Z náhodně zvolené skupiny vybereme minci. Je pravá. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná mince z druhé skupiny je rovněž pravá?

    **Řešení**: a) $2\binom{9}{8}/\binom{16}{8} = 0.0014$, b) $2/9$

## Distribuční funkce

1. V intervalu $\langle 0,1\rangle$ zvolíme náhodně bod $A$. Označíme-li $X$ vzdálenost bodu $A$ od bližšího konce intervalu, určete distribuční funkci $F_X$ a hustotu $f_X$ náhodné veličiny $X$.

   **Řešení**:
$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0; \\ 2t & t \in \langle 0, 1/2\rangle; \\ 1 & t > 1/2. \end{cases} \qquad f_X(t) = \begin{cases} 0 & t \notin \langle 0, 1/2\rangle; \\ 2 & t \in \langle 0, 1/2\rangle. \end{cases}$$

2. Hráči $A$ a $B$ hází šipky na kruhový terč s poloměrem $r$. Náhodné veličiny $L_A$ a $L_B$ budou označovat vzdálenost šipky hozené hráčem $A$ a $B$ od středu terče. Známe jejich distribuční funkce
$$F_{L_A}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0; \\ \sqrt{t/r} & t \in \langle 0, r\rangle; \\ 1 & t > r. \end{cases} \qquad F_{L_B}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0; \\ t^2/r^2 & t \in \langle 0, r\rangle \\ 1 & t > 1. \end{cases}$$
   Který z hráčů je lepší?

   **Řešení**: Lepší je ten z hráčů, který má větší pravděpodobnost umístění šipky blíže středu terče. Porovnáním hustot (tj. derivací funkcí $F_{L_A}$ a $F_{L_B}$) zjistíme, že lepší je $A$.

3. Ve čtverci $\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$ zvolíme náhodně bod $A$. Označíme $T$ trojúhelník s vrcholy $[0,0]$, $[1,0]$ a $A$. Bude-li $X$ znamenat obsah trojúhelníka $T$, určete distribuční funkci $F_X$ a hustotu $f_X$ náhodné veličiny $X$.

   **Řešení**:
$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0; \\ 2t & t \in \langle 0, 1/2\rangle; \\ 1 & t > 1/2. \end{cases} \qquad f_X(t) = \begin{cases} 0 & t \notin \langle 0, 1/2\rangle; \\ 2 & t \in \langle 0, 1/2\rangle. \end{cases}$$

4. Cestující přišel na zastávku autobusu právě, když autobus odjel. Je rozhodnut čekat 5 minut a pak odchází. Intervaly mezi příjezdy autobusů jsou náhodné v rozmezí $4-6$ minut. Je-li $X$ doba, po kterou cestující čeká na zastávce, nalezněte distribuční funkci $F_X$.

   **Řešení**: Náhodná veličina $X$ nabývá hodnot v intervalu $\langle 4,5\rangle$. Je-li $t \in \langle 4,5\rangle$, pak pravděpodobnost jevu $(X \leq t)$ je stejná jako pravděpodobnost, že autobus přijede v časovém intervalu $\langle 4,t\rangle$ od doby odjezdu předchozího spoje. Tato pravděpodobnost je rovna $(t-4)/2$. Takže
$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 4; \\ (t-4)/2 & t \in \langle 4, 5); \\ 1 & t \geq 5. \end{cases}$$

5. Na trh je dán nový model přístroje. Průzkum ukázal, že přístroj by mohl být velmi úspěšný s pravděpodobností 0.6, středně úspěšný s pravděpodobností 0.3 a neúspěšný s pravděpodobností 0.1. Roční zisk spojený s případem „velmi úspěšný" je 15 miliónů, v případě „úspěšný" je 5 miliónů a v případě „neúspěšný" je ztráta 0.5 miliónů. Je-li $X$ roční zisk, nalezněte distribuční funkci $F_X$.

   **Řešení**: $X$ nabývá hodnot $-0.5$, 5 a 15 miliónů. Odtud dostaneme

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < -0.5; \\ 0.1 & t \in \langle -0.5, 5); \\ 0.4 & t \in \langle 5, 15); \\ 1 & t \geq 15. \end{cases}$$

6. (Obtížné) Ve čtverci $\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$ zvolíme náhodně bod $A$. Označíme-li $X$ vzdálenost bodu $A$ od nejbližšího vrcholu čtverce, určete distribuční funkci $F_X$ a hustotu $f_X$ náhodné veličiny $X$.

   **Řešení**:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0; \\ \pi t^2 & t \in \langle 0, \frac{1}{2}\rangle; \\ \pi t^2 + 2\sqrt{t^2 - \frac{1}{4}} - 4t^2 \arcsin \frac{\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}}{t} & t \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\rangle; \\ 1 & t > \frac{1}{2}\sqrt{2}. \end{cases}$$

$$f_X(t) = \begin{cases} 2\pi t & t \in \langle 0, \frac{1}{2}\rangle; \\ 2\pi t - 8t \arcsin \frac{\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}}{t} & t \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\rangle; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

## Střední hodnota

1. Ruleta má 37 polí očíslovaných $0, 1, 2, \ldots, 36$. Lze vsadit buď nějaké na číslo mezi 1 a 36 a v tom případě se vyhrává 36 násobek vsazené částky. Nebo lze vsadit na barvu červenou či černou (sudá políčka jsou čerevná a lichá jsou černá, nula je zelená, na ní se nesází) a v tom případě se vyhrává dvojnásobek vsazené částky. Jaká je v obou případech průměrná výhra?

   **Řešení**: Náhodná veličina $X$ bude mít význam zisku.

   (a) Sázka na barvu: $X$ má hodnoty při vsazené jednotkové částce 1 (výhra) nebo $-1$ (prohra). Tím $EX = 1 \cdot \frac{18}{37} - 1 \cdot \frac{19}{37} = -\frac{1}{37}$.

   (b) Sázka na číslo: $X$ má hodnoty 35 (výhra) nebo $-1$ (prohra). $EX = 35 \cdot \frac{1}{37} - 1 \cdot \frac{36}{37} = -\frac{1}{37}$.

2. Pro $n$ náhodně zvolených lidí určete průměrný počet dnů v roce, v nichž má právě $k$ z nich narozeniny. Jaký je průměrný počet dnů, v nichž mají alespoň dva lidé narozeniny?

   **Řešení**: $X$ značí počet dnů v roce, kdy má přesně $k$ lidí narozeniny. Napíšeme si $X$ ve tvaru $X = X_1 + \cdots + X_{365}$, kde náhodné veličiny $X_i$ nabývají hodnoty 1, má-li v $i$-tý den právě $k$ lidí narozeniny nebo 0, když tomu tak není. Pak $EX = EX_1 + \cdots EX_{365}$. Pravděpodobnost, že v pevně zvolený $i$-tý den má právě $k$ lidí narozeniny je

$$P_i = \binom{n}{k} \frac{364^{n-k}}{365^n}.$$

Odtud dostaneme $EX_i = 1 \cdot P_i$ a celkově

$$EX = 365 \cdot \binom{n}{k} \frac{364^{n-k}}{365^n} = \binom{n}{k} \frac{364^{n-k}}{365^{n-1}}.$$

Druhou otázku zodpovíme tím, že od celkového počtu dní v roce odečteme průměrný počet dní, kdy nemá žádný z $n$ lidí narozeniny a počet dní, kdy má právě jeden člověk narozeniny. Tyto dva údaje získáme z výše vypočteného vzorce pro $k = 0$ a $k = 1$, což dává $365 - \dfrac{364^n}{365^{n-1}} - n\dfrac{364^{n-1}}{365^{n-1}}$.

3. Jistá královská dynastie má následující pravidlo týkající se počtu dětí: Královský pár má mít děti dokud se nenarodí syn nebo dokud nejsou maximálně tři. Jaký je průměrný počet dětí v takové královské rodině, když pravděpodobnost narození dcery nebo syna je stejná?

   **Řešení**: Položíme $X$ náhodnou veličinu označující počet dětí v královské rodině. Její možné hodnoty jsou $X = 0, 1, 2, 3$. Dále, $P(X = 1) = 1/2$. Jev $X = 2$ znamená, že první se narodila dcera a pak syn, což dává $P(X = 2) = 1/4$. Zbývá jev $X = 3$, který znamená buď tři dcery nebo dvě dcery a nejmladší dítě je syn. Oba mají pravděpodobnost $1/8$, takže $P(X = 3) = 1/4$. Tím

   $$EX = 0P(X = 0) + 1P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = 1.75.$$

4. Hodíme dvakrát kostkou. Jaká je průměrná hodnota maximálního z obou výsledků?

   **Řešení**: Označíme $X$ maximum z obou výsledků. Pak $P(X = k) = \frac{2k-1}{36}$, pro $k = 1, \dots, 6$. Odtud dostaneme $E(X) = \sum_{k=1}^{6} kP(X = k) = 161/36$.

5. Házíme nesymetrickou mincí, kde pravděpodobnost panny je $p$ a orla $1 - p$. Jaká je průměrný počet hodů, než dojde k přerušení série stejných výsledků?

   **Řešení**: Náhodná veličina $X$ označuje počet hodů až po přerušení serie stejných výsledků. Její hodnoty jsou $X = 2, 3, \dots$. Jev $(X = k)$ znamená, že buď padala serie $k - 1$ panen a v $k$-tém hodu padl orel nebo serii $k - 1$ orlů nakonec přerušila v $k$-tém hodu panna. Tím $P(X = k) = p^{k-1}(1 - p) + (1 - p)^{k-1}p$ a

   $$E(X) = \sum_{k=2}^{\infty} k\big(p^{k-1}(1 - p) + (1 - p)^{k-1}p\big) = \frac{1}{1 - p} + \frac{1}{p} - 1.$$

6. V kapse máme $n$ různých klíčů, z nichž pouze jeden je správný klíč ke dveřím, které chceme odemknout. Klíče náhodně taháme z kapsy a zkoušíme. Jaký je průměrný počet pokusů než se nám podaří dveře odemknout, když

   (a) použité klíče nevracíme zpět do kapsy,

   (b) použité klíče vracíme zpět do kapsy?

   **Řešení**: $X$ bude označovat počet pokusů.
   (a) V tomto případě je $X = 1, \dots, n$. Jev $(X = k)$ si lze představit tak, že vyložíme všech $n$ klíčů do řady a na $k$-tém místě bude ležet ten správný. Všech uspořádání $n$ klíčů do řady je $n!$ a těch se správným klíčem na $k$-tém místě je $(n - 1)!$. Takže $P(X = k) = 1/n$. Odtud

   $$E(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{n + 1}{2}.$$

(b) Zde $X = 1, 2, \ldots$. Aby nastal $(X = k)$, museli jsem $(k-1)$-krát tahnout nesprávný klíč a v posledním $k$-tém tahu klíč správný. Proto $P(X = k) = (\frac{n-1}{n})^{k-1}\frac{1}{n}$. Tím

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k\Big(\frac{n-1}{n}\Big)^{k-1}\frac{1}{n} = n.$$

7. V krabici je $n$ bílých a $m$ černých míčků. Náhodně vytáhneme $k$ z nich ven bez navrácení. Jaký je průměrný počet bílých míčků ve vzorku?

   **Řešení**: S $i$-tým bílým míčkem spojíme náhodnou veličinu $X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, takových, že $X_i = 1$, pokud byl $i$-tý míček vybrán do vzorku a $X_i = 0$ jinak. Pak počet bílých míčků ve vzorku je $X = X_1 + \cdots + X_n$. Dále

$$E(X_i = 1) = P(X_i = 1) = \frac{\binom{n+m-1}{k-1}}{\binom{n+m}{k}} = \frac{k}{m+n}.$$

   Odtud plyne, že $E(X) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = nk/(m+n)$.

8. Z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ vybereme náhodně a nezávisle na sobě dvě čísla $X_1$ a $X_2$.

   (a) Jaká je průměrná hodnota většího z čísel $X_1$ a $X_2$?

   (b) Jaká je průměrná hodnota vzdálenosti čísel $X_1$ a $X_2$?

   (c) Jaká je průměrná hodnota druhé mocniny vzdálenosti bodu $(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2$ od počátku?

   (d) Jaká je průměrná hodnota vzdálenosti bodu $(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2$ od počátku? (Použijte polární souřadnice.)

   **Řešení**: (a) Položíme $X = \max\{X_1, X_2\}$. Pak distribuční funkce $F_X(t) = t^2$ a hustota $f_X(t) = 2t$. Odtud $E(X) = \int_0^1 t f_X(t)\,dt = 2/3$.
   (b) Podobně pro $X = |X_1 - X_2|$ dostaneme $F_X(t) = 1-(1-t)^2$ a $f_X(t) = 2(1-t)$. Tím $E(X) = 1/3$.
   (c) Zde hustota vektoru $\mathbb{X} = (X_1, X_2)$ je $f_{\mathbb{X}}(s,t) = 1$ pro $(s,t) \in \langle 0, 1\rangle^2$ a $f_{\mathbb{X}}(s,t) = 0$ jinak. Odtud

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(s^2+t^2)f_{\mathbb{X}}(s,t)\,dsdt = \int_0^1\int_0^1 (s^2+t^2)\,dsdt = \frac{2}{3}.$$

   (d) Hustota $f_{\mathbb{X}}$ je stejná jako v bodě (c). Takže s využitím polárních souřadnic dostaneme

$$E(X) = \int_0^1\int_0^1 \sqrt{s^2+t^2}\,dsdt = 2\int_0^{\pi/4}\int_0^{1/\cos\phi} \varrho^2\,d\varrho d\phi = \frac{1}{3}\big(\sqrt{2} + \ln\tan(3\pi/8)\big).$$

9. Společnost přepravuje nákladními auty zboží mezi městy $A$ a $B$ vzdálenými 1000 km. Vozy mají stejnou pravděpodobnobnost poruchy v jakémkoli místě trasy mezi $A$ a $B$. Do jakého místa mezi $A$ a $B$ má firma umístit servisní stanici, aby průměrná vzdálenost od stanice do místa poruchy byla minimální, když hustota pravděpodobnosti místa poruchy je $f(t) = 2t/10^6$, $x \in \langle 0, 1000\rangle$?

   **Řešení**: Označíme symboly $X$ a $S$ vzdálenosti místa poruchy a polohy servisní stanice od města $A$. Dále položíme $Y = |X - S|$. Nejprve vypočteme $E(Y)$.

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_0^{1000} |t - S| f(t)\,dt = \int_0^S (S-t)f(t)\,dt + \int_S^{1000}(t-S)f(f)\,dt \\ &= \frac{2}{3}10^{-6}S^3 - S + \frac{2}{3}10^3. \end{aligned}$$

   Minimum této funkce je rovno $1000/\sqrt{2}$, což je hledaná vzdálenost servisní stanice od $A$.

10. Stojíme na břehu přímé řeky. Náhodně zvolíme směr od řeky a jdeme tímto směrem 1 km do bodu $Q$.

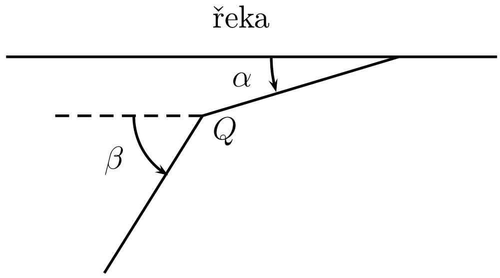
    (a) Jaká je naše průměrná vzdálenost od řeky?

    (b) Z bodu $Q$ se dále vydáme náhodně jakýmkoli směrem a opět jdeme 1 km. Jaká je pravděpodobnost, že dosahneme řeky dříve než ujdeme 1 km?

    **Řešení**: (a) Vyjdeme-li od řeky pod náhodným úhlem $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$, pak vzdálenost po 1 km je $d = 1 \cdot \sin \alpha$. Tím

$$Ed = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin \alpha \, d\alpha = \frac{2}{\pi}.$$

    (b) Poloha v tomto případě je určena dvěma náhodnými úhly $\alpha$ a $\beta$, viz obrázek.




    Úhel $\beta \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a ze symetrie se můžeme pro úhel $\alpha$ omezit na $\alpha \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$. Náhodný výběr dvojice úhlů $(\alpha, \beta) \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle$ odpovídá jednomu pokusu. Máme-li zadaný úhel $\alpha$, pak příznivé volby pro $\beta$, kdy dosáhneme břehu řeky dříve než ujdeme 1 km, jsou $\beta \in \langle \pi + \alpha, 2\pi - \alpha \rangle$. Tato množina zabírá v obdélníku $\langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle$ jednu čtvrtinu, takže výsledek je 1/4.

11. Životnost páru armádních bot má normální rozdělení se střední hodnotou 12 měsíců a směrodatnou odchylkou $\sigma = 2$. Je vydáno 10 000 párů. Kolik párů bude v průměru zapotřebí vyměnit po uplynutí 15 měsíců?

    **Řešení**: Označíme $Z$ životnost bot. Pak $Z$ má rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ s $\mu = 12$ a $\sigma = 2$. Položíme $X_i = 1$, je-li třeba $i$-tý pár bot vyměnit po 15 měsících a $X_i = 0$ jinak. Pak počet párů, které bude třeba vyměnit je $X = \sum_{i=1}^{10000} X_i$. Protože $E(X_i) = P(Z \leq 15) = 0.9332$, dostáváme, že $E(X) = 10000 \cdot 0.9332 = 9332$.

12. Uvažujme v rovině trojúhelník $T$, jehož vrcholy jsou tvořeny body $(0,1)$, $(0,0)$ a $(1,0)$. V trojúhelníku zvolíme náhodně bod $(X, Y)$, přičemž všechny volby jsou stejně pravděpodobné. Jaká je průměrná hodnota $X$-ové souřednice bodu $(X, Y)$?

    **Řešení**: Označíme $\mathbb{X} = (X, Y)$. Hustota $f(s,t)$ náhodného vektoru $\mathbb{X}$ je rovna 2 v bodech $T$ a 0 jinde. Takže

$$E(X) = \iint_T s f(s,t) \, dt ds = 2 \int_0^1 \int_0^{1-s} s \, dt ds = \frac{1}{3}.$$

13. V jednotkovém čtverci zvolíme náhodně bod $(X, Y)$, přičemž všechny volby jsou stejně pravděpodobné. Jaká je průměrná vzdálenost bodu $(X, Y)$ od diagonály čtverce?

    **Řešení**: Vzdálenost bodu $(X, Y)$ od diagonály je $L = |X - Y|/\sqrt{2}$. Pak

$$E(L) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{|s-t|}{\sqrt{2}} ds dt = \int_0^1 \Big( \int_0^t (t-s) ds + \int_t^1 (s-t) ds \Big) dt = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

## Centrální limitní věta

1. Hodíme 420 krát hrací kostkou a výsledky hodů sčítáme. Pomocí centrální limitní věty odhadněte pravděpodobnost, že součet bude ležet mezi čísly 1400 a 1550.

   **Řešení**: Součet si označíme $S_{420} = X_1+X_2+\cdots+X_{420}$, kde $X_i = 1$ je hodnota výsleku $i$-tého hodu. $E(X_i) = 3.5$ a $D(X_i) = 2.916$, tj. $\sigma = 1.708$. Standardizovaný součet $S^*_{420}$ pak splňuje $-70/(\sigma\sqrt{420}) \le S^*_{420} \le 80/(\sigma\sqrt{420})$, a tím dostaneme

   $$P(1400 \le S_{420} \le 1550) = P(-2 \le S^*_{420} \le 2.285) = \Phi(2.285) - \Phi(-2) = 0.965.$$

2. Průměrná váha bedny je $\mu = 50$ kg a řídí se normálním rozdělením se směrodatnou odchylkou $\sigma = 5$. Kolik beden je možné naložit na nákladní auto s nosností 1 tuna, abychom s pravděpodobností 99% nepřesáhli dovolenou nosnost?

   **Řešení**: $n = 18.98$ tj. maximálně 18.

3. Bod konající náhodnou procházku po ose $x$ začíná v bodě 0 a pohybuje se tak, že se po každé vteřině posune o jedničku doprava s pravděpodobností 1/2 nebo o jedničku doleva rovněž s pravděpodobností 1/2. Pomocí centrální limitní věty odhadněte pravděpodobnost, že bod bude po 100 krocích vzdálen od počátku nejvýše o 10.

   **Řešení**: Poloha po 100 krocích je $S_{100} = X_1 + \cdots + x_{100}$, kde $X_i = \pm 1$. Pak $E(X_i) = 0$ a $D(X_i) = 1$. Jev $|S_{100}| \le 10$ má ve standardizovaném součtu tvar $|S^*_{100}| \le 1$. Takže

   $$P(|S^*_{100}| \le 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 0.682.$$

4. Životnost kryptonového zářiče má normální rozdělení se střední hodnotou $\mu = 160$ hodin. Požadavky zákazníka jsou: životnost mezi $120 - 200$ hodin s pravděpodobností 95%.

   (a) Jaká musí být směrodatná odchylka, aby se požadavku zákazníka vyhovělo?

   (b) Je-li směrodatná odchylka rovna hodnotě zjištěné v předchozí otázce, jaká je pravděpodobnost, že průměr životností dvou na sobě nezávislých zářičů bude v limitu $120 - 200$ hodin?

   **Řešení**: Označíme $X$ životnost zářiče. Pak $E(X) = \mu = 160$ a $D(X) = \sigma^2$ pro hledané $\sigma$. Podmínka $120 \le X \le 200$ se pro standartizovanou veličinu $X^*$ změní na $|X^*| \le 40/\sigma$. Pak

   $$0.95 \le P(|X^*| \le 40/\sigma) = \Phi(40/\sigma) - \Phi(-40/\sigma) = 2\Phi(40/\sigma) - 1.$$

   Z tabulky máme $40/\sigma \le 1.96$, tj. $\sigma \le 20.4$.

   Jsou-li $X_1$ a $X_2$ životnosti nezávislých zářičů, pak náhodná veličina $Z = (X_1 + X_2)/2$ má normální rozdělení se střední hodnotou 160 a rozptylem $20.4^2/2 = 208.1$. Podmínka $120 \le Z \le 200$ se pro standartizovanou veličinu $Z^*$ změní na $|Z^*| \le 2.77$. To má pravděpodobnost $\Phi(-2.77)+\Phi(2.77) = 2\Phi(2.77)-1 = 0.994$.

5. Obsah smogových částic v ovzduší v dané lokalitě je pravidelně monitorován. Přípustný limit je 7.7. Předpokládejme, že skutečný obsah smogových částic se řídí normálním rozdělením se střední hodnotou $\mu = 7.6$ a směrodatnou odchylkou $\sigma = 0.04$. Měřící přístroj je zatížen nepřesností, která má normální rozdělení s $\mu = 0$ a $\sigma = 0.03$.

   (a) Jaká je pravděpodobnost, že výsledek měření nepřesáhne 7.7?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že průměr tří po sobě jdoucích nezávislých měření nepřesáhne 7.7?

**Řešení**: Označíme $X_1$ skutečný obsah částic v ovzduší a $X_2$ chybu měřícího přístroje. Pak naměřená hodnota je náhodná veličina $Y = X_1 + X_2$, která má normální rozdělení se střední hodnotou $7.6+0$ a rozptylem $0.04^2+0.03^2 = 0.0025$. Podmínka $Y \leq 7.7$ se pro standartizovanou veličinu $Y^*$ změní na $Y^* \leq 2$. To má pravděpodobnost $\Phi(2) = 0.977$.

Jsou-li $Y_1, Y_2$ a $Y_3$ tři nezávislá měření, pak náhodná veličina $Z = (Y_1+Y_2+Y_3)/3$ má normální rozdělení se střední hodnotou 7.6 a rozptylem $0.0025/3 = 0.00083$. Podmínka $Z \leq 7.7$ se pro standartizovanou veličinu $Z^*$ změní na $Z^* \leq 3.46$. To má pravděpodobnost $\Phi(3.46) = 0.9997$.

6. Házíme $n$-krát hrací kostkou. Pomocí centrální limitní věty zjistěte, kolik je minimálně třeba provést hodů, máme-li s pravděpodobností 98% tvrdit, že počet dvojek padlých v $n$ hodech leží v intervalu

$$\left\langle \frac{n}{12}, \frac{n}{4} \right\rangle ?$$

**Řešení**: Položíme $X_i = 1$ padla-li v $i$-tém hodu dvojka a $X_i = 0$ jinak. Pak $\mu = E(X_i) = 1/6$ a $\sigma^2 = D(X_i) = 5/(36)$ a počet dvojek v $n$ hodech je $X_1 + \cdots X_n$. Standardizovaný součet $S_n^*$ splňuje $|S_n^*| \leq \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{5}} = 0.223\sqrt{n}$, a tím dostaneme

$$0.98 \leq P(|S_n^*| \leq 0.223\sqrt{n}) = \Phi(0.223\sqrt{n}) - \Phi(-0.223\sqrt{n}) = 2\Phi(0.223\sqrt{n}) - 1,$$

což z tabulky dává $0.223\sqrt{n} \geq 2.33$, tj. $n \geq 110$.

7. Cena jedné akcie Pivovaru je v $n$-tý den roku rovna $Y_n$. Akcionář Albert zjistil, že rozdíly $X_n = Y_{n+1} - Y_n$ se chovají jako nezávislé náhodné veličiny se střední hodnotou $\mu = 0$ a rozptylem $\sigma^2 = 1/4$. Má-li akcie v 1. den roku hodnotu $Y_1 = 100$, určete pomocí centrální limitní věty pradvěpodobnost, že $Y_{365} \geq 110$. (Návod: vyjádřete $Y_{365} - Y_1$ pomocí $X_n$.)

**Řešení**: Označíme $S_{364} := X_1 + \cdots + x_{364} = Y_{365} - Y_1 = Y_{365} - 100$. Podmínka $Y_{365} \geq 110$ je ekvivalentní s $S_{364} \geq 10$. Pro standardizovaný součet $S_{364}^*$ to znamená, že má být větší než $10/(\frac{1}{2}\sqrt{364}) = 1.05$. Hledáme tak pravděpodobnost jevu

$$P(S_{364} \geq 10) = P(S_{364}^* \geq 1.05) = 1 - \Phi(1.05) = 1 - 0.853 = 0.147.$$

8. Měření vzdálenosti Jupitera a jeho měsíce Kalista je díky neovlivnitelným chybovým faktorům náhodná veličina, jejíž střední hodnota $\mu$ je skutečná vzdálenost a rozptyl $\sigma^2 = 16$. Kolik měření musíme provést, abychom a pravděpodobností 96% mohli tvrdit, že aritmetický průměr naměřených hodnot se od skutečné vzdálenosti liší nejvýše o 1.5 jednotek.

**Řešení**: Výsledek $k$-tého měření označme $X_k$. Je to náhodná veličina s $E(X_k) = \mu$ a $D(X_k) = 16$. Položíme $_n = X_1 + \cdots + x_n$. Podmínka, která má být splněna je

$$0.96 \leq P(|\tfrac{1}{n} S_n - \mu| < 1.5).$$

Pro standardizovaný součet $S_n^*$ to znamená

$$0.96 \leq P(|S_n^*| < 1.5\sqrt{n}/\sigma) = P(|S_n^*| < 0.375\sqrt{n}) = \Phi(0.375\sqrt{n}) - \Phi(-0.375\sqrt{n}) = 2\Phi(0.3$$

Z tabulky dostaneme $0.375\sqrt{n} \geq 2.05$, tj. $n \geq 30$.

9. Házíme $n$-krát symetrickou mincí. Pomocí centrální limitní věty zjistěte, kolik je minimálně třeba provést hodů, máme-li s pravděpodobností 99% tvrdit, že počet $S_n$ pannen padlých v $n$ hodech je alespoň 4/5 počtu orlů.

**Řešení**: Podmínku $S_n \geq \frac{4}{5}(n - S_n)$ převedeme na podmíku pro standardizovaný součet $S_n^*$. Protože $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, kde

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{je-li v } k\text{-tém hodu panna} \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

je $\mu = E(X) = 1/2$ a $\sigma^2 = D(X) = 1/4$. Podmínka $S_n \geq \frac{4}{5}(n - S_n)$ je ekvivalentní s $S_n \geq 4n/9$ a pro $S_n^*$ má tvar $S^* \geq -\frac{1}{9}\sqrt{n}$. Pak

$$0.99 \leq P(S^* \geq -\tfrac{1}{9}\sqrt{n}) = 1 - \Phi(-\tfrac{1}{9}\sqrt{n}) = \Phi(\tfrac{1}{9}\sqrt{n}).$$

Z tabulky dostaneme, že $\frac{1}{9}\sqrt{n} \geq 2.33$, tj. $n \geq 440$.