Diferenciální počet funkcí více proměnných.

Jan Hamhalter,
Jaroslav Tišer

Katedra matematiky
Fakulta elektrotechnická
České Vysoké Učení Technické
Praha

*Když se kdysi zeptali Isaaca Newtona,
čím to je, že za svůj život učinil tolik
objevů, odpověděl: „Přemýšlel jsem.“*

Předmluva

Tato skripta jsou druhým vydáním stejnojmenných skript FEL ČVUT z roku 1996. Zabývají se diferenciálním počtem ve více dimenzích. Je to partie řadící se ke klasické části analýzy. Metody a postupy jsou mnohokráte zpracovány a prověřeny. Nešlo nám proto o vnášení nějaké originality. Naše snaha spočívala v tom, aby si tento text udržel jistou matematickou kulturu a nadhled. To zase od čtenáře vyžaduje určitou dávku aktivní pozornosti.

Čemu jsou věnovány jednotlivé kapitoly lze snadno zjistit letmým pohledem do obsahu skript. První tři kapitoly obsahují základní pojmy. Čtvrtá kapitola obsahuje hlubší poznatky a je míněna pro magisterské studium. Pro bakalářské studium je ze čtvrté kapitoly podstané pouze znění věty o existenci extrému. Ze zbývajících kapitol je pro bakaláře důležitá Kapitola 5 a 7 a první část Kapitoly 6. Zbylé partie jsou určeny pro magisterské studium. Za každým tématickým celkem následuje několik typických řešených úloh. Stupeň zvládnutí látky si čtenář pak může ověřit na připojených neřešených úlohách.

Praha, září 2005.

Obsah

Kapitola 1

Euklidovské prostory

Hlavním cílem této učebnice je studium vlastností funkcí závisících obecně na n proměnných. Takové funkce jsou definovány na n-rozměrném prostoru nebo na jisté jeho podmnožině. V případě funkce jedné proměnné je definičním oborem nejčastěji interval. Na příkladech v další kapitole uvidíme, že definiční obory běžných funkcí více proměnných jsou mnohem komplikovanější a jejich matematický popis vyžaduje nové pojmy. Naším prvním úkolem bude proto seznámit se se základními vlastnostmi vícerozměrných prostorů a jejich podmnožin.

1 Euklidovské prostory

Symbolem $\mathbb{R}^n$ budeme v dalším označovat n-násobný kartézský součin $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}$ množiny $\mathbb{R}$ reálných čísel. Tato množina tvoří n-rozměrný prostor. Např. $\mathbb{R}^2$ označuje dvojrozměrný prostor, tj. rovinu. Jednotlivé prvky množiny $\mathbb{R}^n$ budeme označovat tučnými symboly $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$, apod. V souřadnicovém vyjádření pro ně používáme zápis $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Čísla $x_1, \dots, x_n$ nazýváme po řadě první až n-tou souřadnicí. V případě $\mathbb{R}^2$ nebo $\mathbb{R}^3$ budeme často dávat přednost označení souřadnic $\boldsymbol{x} = (x, y)$ a $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ místo $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ a $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Prvky kartézského součinu $\mathbb{R}^n$ se nazývají body nebo vektory. Jde o různá označení téhož. Pojmenování vektor užíváme v situaci, kdy chceme zdůraznit směr, který takový prvek $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ určuje: v tom případě se na $\boldsymbol{x}$ díváme jako na vektor začínající v počátku $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ a končící v bodě $\boldsymbol{x}$.

Na množině $\mathbb{R}^n$ jsou definovány operace sčítání a násobení skalárem (tj. reálným číslem) následujícím způsobem: Jsou-li $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ a $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)$ dva prvky $\mathbb{R}^n$, pak

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \\ \lambda \boldsymbol{x} &= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n), \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

V $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ jde o běžné sčítání a násobky vektorů, které známe z fyziky.

Kromě těchto operací máme ještě skalární součin $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$, který je definován vztahem

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Právě zavedené operace se souhrnně nazývají *algebraické operace* na množině $\mathbb{R}^n$. Tyto jsou hlavním předmětem Lineární algebry. Nás kromě této algebraické struktury zajímá ještě jiná vlastnost prostoru $\mathbb{R}^n$, tzv. struktura *metrická*. Je to struktura závislá na definování pojmu vzdálenosti mezi dvěma body. Podívejme se nejdříve na vzdálenost bodu $\boldsymbol{x}$ od počátku souřadnicového systému, tedy od bodu $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$. Je-li například $n = 2$, víme z Pythagorovy věty, že vzdálenost bodu $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ od počátku je rovna $\sqrt{x^2 + y^2}$. V $\mathbb{R}^3$ je vzdálenost bodu (x, y, z) od počátku $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Tato skutečnost je vodítkem pro obecnou definici. *Velikostí (normou)* vektoru $\boldsymbol{x}$ nazýváme číslo $\|\boldsymbol{x}\|$ definované vztahem

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

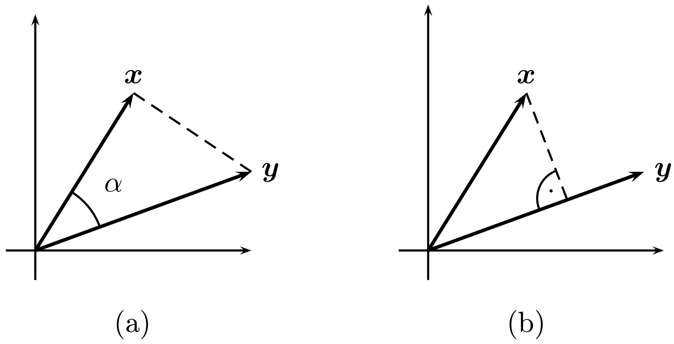
Snadno můžeme ověřit, že skalární násobek se z normy vytýká v absolutní hodnotě: $\|\lambda \boldsymbol{x}\| = |\lambda| \cdot \|\boldsymbol{x}\|$ pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$. Obzvlášť důležitý je geometrický význam velikosti rozdílu $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ prvků $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$. Označuje totiž jejich vzdálenost. Důležitá, i když jednoduchá, je souvislost mezi velikostí vektoru a skalárním součinem

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}. \tag{1.1}$$

Skalární součin má rovněž geometrickou interpretaci. Uvažujme dva nenulové vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$. Pak

$$\frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\|} = \cos \alpha, \tag{1.2}$$

kde α je úhel, který svírají vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$. Abychom si to ověřili, uvažujme trojúhelník na obr.1.1(a).



Obr. 1.1

Délky stran jsou $\|\boldsymbol{x}\|$, $\|\boldsymbol{y}\|$ a $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$. Kosinová věta v této situaci dává, že

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 - 2\|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\| \cos \alpha.$$

Použijeme vztah (1.1) pro druhé mocniny norem a dostaneme

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y} - 2\|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\| \cos \alpha.$$

Roznásobením a úpravou přejde rovnice na tvar

$$-2\, \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = -2\|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\| \cos \alpha,$$

což je ekvivalentní s (1.2). Ve specielním případě, kdy jeden vektor je jednotkový, např. $\|\boldsymbol{y}\| = 1$, nám skalární součin $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ udává velikost projekce vektoru $\boldsymbol{x}$ do směru vektoru $\boldsymbol{y}$, viz obr.1.1(b).

Následující Věta uvádí základní nerovnosti pro normy vektorů, které budeme často používat.

Věta 1.1. *Pro každé dva vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ platí*

(i) *Velikost vektoru je větší nebo rovna velikosti jeho složek, $|x_i| \leq \|\boldsymbol{x}\|$, $i = 1, \ldots, n$;*

(ii) $|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq \|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\|$ *(Schwarzova nerovnost);*

(iii) $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ *(trojúhelníková nerovnost).*

Důkaz. (i)Tato nerovnost je zcela jasná z definice normy vektoru.

(ii)Zde použijeme jednoduchý (ale poučný) obrat s kvadratickou nerovností. Vztah (1.1) říká, že pro každá pevně zvolená $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ a každé reálné číslo $t \in \mathbb{R}$ platí

$$(t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot (t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \|t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 \geq 0.$$

Roznásobením činitelů v této nerovnosti dostaneme

$$t^2\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} + 2t(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y}) \geq 0,$$

neboli

$$t^2\|\boldsymbol{x}\|^2 + 2t(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 \geq 0.$$

Výraz na levé straně nerovnosti je kvadratická funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Protože je stále nezáporná, může mít buď jeden dvojnásobný kořen nebo nemá kořen vůbec žádný. Diskriminant příslušného kvadratického výrazu je tak nejvýše roven nule.

$$D = 4(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})^2 - 4\|\boldsymbol{x}\|^2 \cdot \|\boldsymbol{y}\|^2 \leq 0.$$

Odtud

$$4(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})^2 \leq 4\|\boldsymbol{x}\|^2 \cdot \|\boldsymbol{y}\|^2.$$

Vydělením 4 a odmocněním pak získáváme požadovanou nerovnost.

(iii) Trojúhelníková nerovnost je jednoduchým důsledkem nerovnosti Schwarzovy. Platí totiž opět podle (1.1)

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2.$$

Proto

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 \leq \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| + \|\boldsymbol{y}\|^2 \leq \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 = (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2.$$

Odmocněním pak dostáváme trojúhelníkovou nerovnost, což ukončuje důkaz. $\square$

Jak naznačuje terminologie má nerovnost (iii) geometrický význam. Vezměme si pro ilustraci trojúhelník, jehož vrcholy jsou body $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$. Velikosti stran jsou pak vzdálenosti mezi vrcholy — tedy čísla $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|, \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}\|, \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}\|$. Nerovnost (iii) Věty 1.1 implikuje

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}+\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}\| + \|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\|.$$

Velikost každé strany trojúhelníka je tedy nejvýše rovna součtu velikostí dvou zbylých stran.

Množina $\mathbb{R}^n$, ve které máme zavedeny výše zmíněné algebraické operace a definovánu vzdálenost dvou bodů, se nazývá *euklidovský prostor*. (Euklidés z Alexandrie žil na přelomu 4. a 3. století před naším letopočtem. Mezi jeho nejznámější matematické práce patří soubor knih z názvem „Základy“, ve kterých shrnul a rozvinul velmi moderní formou veškerou geometrii své doby).

V euklidovském prostoru může být vzdálenost mezi body libovolně velká. V některých situacích se tomu chceme naopak vyhnout. Proto zavádíme pojem omezená množina.

Definice 1.2. *Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je* **omezená**, *jestliže existuje konstanta $K > 0$ tak, že $\|\boldsymbol{x}\| \leq K$ pro každé $\boldsymbol{x} \in M$.*

Pro geometrickou představu si můžeme uvědomit, že podmínka v Definici 1.2 říká přesně to, že množina M se vejde do n-rozměrné koule se středem v počátku a poloměrem K.

V další definici se seznámíme s pojmem okolí bodu v euklidovském prostoru.

Definice 1.3. *Nechť $\boldsymbol{x}$ je bod v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$ a $\delta > 0$. Každou množinu*

$$U_\delta(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| < \delta\}$$

nazveme (kruhovým) **okolím bodu** $\boldsymbol{x}$. *Každou množinu*

$$P_\delta(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| < \delta\}$$

nazveme **prstencovým okolím** *bodu $\boldsymbol{x}$.*

Ve dvourozměrném (resp. třírozměrném) prostoru jsou okolími daného bodu všechny kruhy (resp. koule) se středem v daném bodě a poloměrem δ. Okolí tedy můžeme chápat jako n-rozměrnou kouli opsanou kolem bodu $\boldsymbol{x}$. Prstencové okolí se od okolí liší pouze tím, že neobsahuje svůj střed, $P_\delta(\boldsymbol{x}) = U_\delta(\boldsymbol{x}) \setminus \{\boldsymbol{x}\}$.

Někdy budeme užívat stručnější zápis $U(\boldsymbol{x})$, $P(\boldsymbol{x})$, ... nebude-li nutné specifikovat velikost okolí. Pomocí pojmu okolí můžeme nyní charakterizovat polohu bodu vzhledem k množině.

Definice 1.4. *Nechť $\boldsymbol{x}$ je bod a M je množina v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že bod $\boldsymbol{x}$ je*

(i) **vnitřním bodem** *množiny M, jestliže existuje okolí $U(\boldsymbol{x})$ bodu $\boldsymbol{x}$ tak, že*

$$U(\boldsymbol{x}) \subset M;$$

(ii) **hraničním bodem** *množiny M, jestliže pro každé okolí $U(\boldsymbol{x})$ bodu $\boldsymbol{x}$ platí současně*

$$U(\boldsymbol{x}) \cap M \neq \emptyset \quad a \quad U(\boldsymbol{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset;$$

(iii) **vnějším bodem** *množiny M, jestliže existuje takové okolí $U(\boldsymbol{x})$ bodu $\boldsymbol{x}$, že*

$$U(\boldsymbol{x}) \cap M = \emptyset;$$

(iv) **hromadným bodem** *množiny M, jestliže pro každé prstencové okolí $P(\boldsymbol{x})$ bodu $\boldsymbol{x}$ platí*

$$P(\boldsymbol{x}) \cap M \neq \emptyset;$$

(v) **izolovaným bodem** *množiny M, jestliže existuje takové okolí $U(\boldsymbol{x})$ bodu $\boldsymbol{x}$, že*

$$U(\boldsymbol{x}) \cap M = \{\boldsymbol{x}\}.$$

Podívejme se na význam jednotlivých pojmů podrobněji. Vnitřní bod množiny M je takový bod, kolem kterého je možno opsat okolí ležící celé v dané množině. V „sousedství" takového bodu tedy není nic jiného než body množiny M. Proto je přirozené nazývat ho bodem vnitřním. Pro hraniční bod množiny M platí, že každé jeho okolí protíná jak množinu M tak i její doplněk. Libovolně blízko hraničního bodu jsou jak body dané množiny tak i body jejího doplňku. To přesně odpovídá představě polohy na hranici.

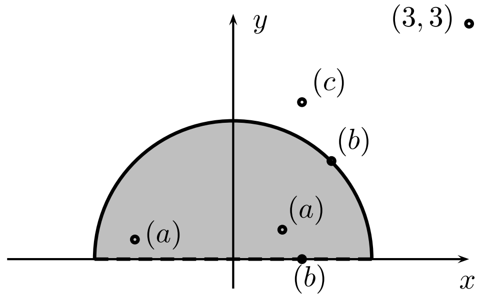
Zcela originálním způsobem vysvětloval pojem hraničního bodu prof. Eduard Čech (1893 – 1960), jeden z nejvýznamnějších českých matematiků. Traduje se totiž, že se během přednášky neváhal vyšplhat do výše položeného okna posluchárny a demonstrovat tak svou vlastní osobou hraniční bod množiny všech bodů posluchárny. Historka o Čechově schopnosti přibližovat abstraktní pojem hraje klíčovou roli v detektivním příběhu J.Klímy „Smrt má ráda poezii" [2]. Tato detektivka se odehrává v akademickém prostředí a čtenář v ní najde nejen důmyslnou zápletku, ale i další názorné vysvětlení pojmu hraniční bod včetně obrázkového doprovodu.

K vnějšímu bodu poznamenejme, že se nejedná o nic jiného než o vnitřní bod doplňku dané množiny. (Profesor Čech byl opatrný a demonstraci vnějšího bodu posluchárny se již vyhnul. Jedné z obětí v detektivce [2] se to bohužel nepodařilo.)

Každý bod má vůči množině právě jednu z poloh popsanou v částech (i), (ii), (iii) Definice 1.4. Hromadný bod můžeme považovat za jakýsi „bod kondenzace" dané množiny. V každém prstencovém okolí tohoto bodu se totiž musí nacházet alespoň jeden prvek množiny M. Z tohoto faktu ihned vyplývá, že v každém prstencovém okolí leží dokonce nekonečně mnoho bodů z množiny M: Zvolíme libovolně prstencové okolí daného hromadného bodu a v něm bod $\boldsymbol{x}_1 \in M$. Poté můžeme zvolit další prstencové okolí o poloměru menším než je vzdálenost bodu $\boldsymbol{x}_1$ od středu okolí a zvolit v něm bod $\boldsymbol{x}_2 \in M$. Neustálým opakováním tohoto postupu nakonec získáme nekonečně mnoho bodů $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \ldots$ množiny M v daném prstencovém okolí.

Protipólem hromadného bodu je bod izolovaný. Izolované body jsou takové body, které je možno od ostatních bodů dané množiny oddělit pomocí jistého okolí. Máme-li neprázdnou množinu M, pak každý její bod je buď hromadným bodem množiny M nebo izolovaným bodem M. Všechny pojmy Definice 1.4 si budeme ilustrovat na následujícím příkladě.

Příklad 1.5. Nechť $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ y > 0\} \cup \{(3, 3)\}$. Množina M je horní polovina jednotkového kruhu, kde hraniční polokružnice patří k množině M, ale úsečka na ose x nikoli, sjednocená s bodem $(3, 3)$, viz. obr.1.2.



Obr. 1.2

Body na obrázku označené (a) reprezentují body vnitřní. Body označené písmenem (b) jsou příkladem hraničních bodů. Povšimněme si, že některé hraniční body (na polokružnici) patří do množiny M, zatímco jiné (na úsečce) do M nenáleží. Bod (c) je příkladem vnějšího bodu. Bod $(3, 3)$ patří do M a je izolovaným bodem. Jako každý izolovaný bod je i bodem hraničním. Body (a) a (b) jsou zároveň hromadnými body množiny M.

Definice 1.6. *Nechť M je množina v euklidovském prostoru.* **Vnitřek** *M^o množiny M je množina všech vnitřních bodů množiny M.* **Hranice** *∂M množiny M je množina všech hraničních bodů.* **Uzávěr** *$\overline{M}$ množiny M je množina $M \cup \partial M$.*

Příklad 1.7. Uvažujme množinu M z Příkladu 1.5. Pak

$$M^o = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$$

neboť to jsou body ležící v horním polokruhu mimo ohraničující kružnici a mimo úsečky na ose x.

$$\partial M = \{(x, 0) \mid x \in \langle -1, 1\rangle\} \cup \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\} \cup \{(3, 3)\},$$

neboť zde je to horní polokružnice s úsečkou na ose x a bodem $(3, 3)$.

$$\overline{M} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\} \cup \{(3, 3)\} = M^o \cup \partial M.$$

Povšimněme si, že vnitřek M^o a hranice ∂M jsou vždy disjunktní množiny,

$$M^o \cap \partial M = \emptyset.$$

Množina, která má pouze vnitřní body je „otevřená“ v tom smyslu, že se od každého jejího bodu můžeme o jistý kousek vzdálit aniž množinu opustíme. Na druhé straně, obsahuje-li množina celou svoji hranici, pak ji intuitivně považujeme za uzavřenou. To je motivací následující důležité definice.

Definice 1.8. *Množina M v euklidovském prostoru je* **otevřená***, jestliže je rovna svému vnitřku. Množina M je* **uzavřená***, jestliže je rovna svému uzávěru.*

Ekvivalentně řečeno, množina je uzavřená, jestliže obsahuje svoji hranici. Příkladem uzavřené množiny je množina $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Je to koule se středem v počátku a poloměrem 1 obsahující svoji hranici. Příkladem otevřené množiny v $\mathbb{R}^3$ je množina $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 < 1\}$ – koule se středem v počátku a poloměrem jedna bez hraniční kulové plochy. Množina M z Příkladu 1.5 obsahuje pouze část své hranice, a není proto ani otevřená ani uzavřená. Celý prostor a prázdná množina jsou vždy množiny současně otevřené i uzavřené.

Uzávěrem každé množiny vznikne množina uzavřená. Uzávěr jakékoli množiny M si můžeme představit dvěma způsoby: buď jako nejmenší uzavřenou množinu obsahující naši množinu M, nebo jako množinu, ke které přidáme její hranici.

Protože vnitřek a hranice jsou disjunktní, je množina otevřená právě tehdy, když její doplněk je uzavřený a naopak.

V dalším výkladu se chvíli zastavíme u otázky, které množiny mají hromadné body. Protože v každém okolí hromadného bodu množiny M je nekonečně mnoho dalších bodů z M, je zcela jistě množina M nekonečná. Nekonečnost sama o sobě však ještě existenci hromadného bodu nezaručí. Vezměme si například množinu všech přirozených čísel. Tato množina se skládá pouze z izolovaných bodů. Žádné reálné číslo tedy nemůže být jejím hromadným bodem. Přirozená čísla však tvoří neomezenou množinu, a proto nás napadne otázka zda podobný příklad nekonečné množiny bez hromadných bodů nalezneme i mezi množinami omezenými. Odpověď je celkem překvapující – taková množina neexistuje. Znamená to například, že nekonečně mnoho bodů ve čtverci nelze rozmístit rovnoměrně tj. tak, aby se nezhušťovaly kolem žádného bodu kondenzace. Tato důležitá vlastnost euklidovských prostorů je dokázána v následující větě.

Věta 1.9. *Každá nekonečná omezená množina v euklidovském prostoru má alespoň jeden hromadný bod.*

Důkaz. Postup předvedeme v $\mathbb{R}^3$. Základní myšlenka je totiž zcela stejná i v obecném případě euklidovského prostoru.

Předpokládejme, že $M \subset \mathbb{R}^3$ je omezená nekonečná množina. Pak existuje krychle K_1, která obsahuje množinu M, $K_1 \supset M$. Krychle K_1 je trojnásobný kartézský součin intervalu I, $K = I \times I \times I$ a interval I reprezentuje hranu krychle K_1. Rozdělíme nyní interval I na dva uzavřené intervaly stejné délky. Provedeme-li toto rozdělení na každé hraně krychle K_1, dostaneme dělení této krychle na 8 polovičních uzavřených krychlí. V jedné z těchto krychlí, řekněme v krychli K_2, musí ležet nekonečně mnoho bodů množiny M. Tento postřeh je klíčovým pozorováním důkazu a můžeme ho zdůvodnit následujícím argumentem. Kdyby ve všech dělících krychlích, kterých je konečně mnoho, bylo pouze konečně mnoho bodů množiny M, pak by M sama byla sjednocením konečně mnoha konečných množin, a to je množina konečná. To by ovšem bylo ve sporu s předpokladem.

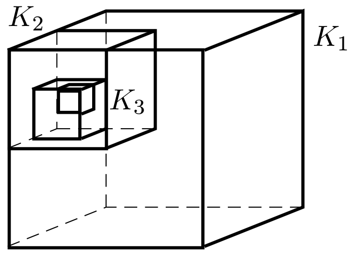
Nyní můžeme použít zcela stejnou úvahu pro krychli K_2: Rozdělíme ji na 8 krychlí s polovičními stranami a mezi nimi nalezneme krychli K_3, která obsahuje nekonečně mnoho prvků množiny M. Postupným opakováním této procedury vytvoříme posloupnost do sebe vnořených krychlí

$$K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \cdots \supset K_i \supset K_{i+1} \cdots \tag{1.3}$$

z nichž každá obsahuje nekonečně mnoho elementů množiny M, viz obr.1.3. Hrana i-té krychle K_i je rovna číslu

$$\frac{\text{délka}(I)}{2^{i-1}}.$$

Důležité přitom je, že délky konvergují k nule.



Obr. 1.3

Projekce jednotlivých krychlí na souřadnou osu x tvoří posloupnost do sebe vřazených uzavřených intervalů

$$\langle a_1, b_1\rangle \supset \langle a_2, b_2\rangle \supset \cdots$$

Protože jejich délky konvergují k nule, průnik obsahuje jediný bod. Označme ho x_0. Projekce krychlí na osu y a osu z tvoří podobné systémy do sebe vřazených uzavřených intervalů. Jejich průniky označme postupně y_0 a z_0. Nyní položíme $\boldsymbol{w} = (x_0, y_0, z_0)$. Bod $\boldsymbol{w}$ leží ve všech krychlích z posloupnosti (1.3), a tedy $\boldsymbol{w} \in \bigcap_i K_i$. Nyní již není těžké ověřit, že $\boldsymbol{w}$ je hledaným hromadným bodem. Zvolme okolí $U(\boldsymbol{w})$ bodu $\boldsymbol{w}$. Vzhledem k tomu, že délky stran krychlí konvergují k nule, najdeme tak malou krychli z posloupnosti (1.3), která se celá vejde do okolí $U(\boldsymbol{w})$. S touto krychlí se ovšem do $U(\boldsymbol{w})$ vejde i nekonečně mnoho prvků množiny M. Tím je důkaz ukončen. □

Předchozí typ důkazu je takový, že sice zaručuje existenci hromadného bodu, avšak nikterak nedává návod, jak takový bod najít. Není totiž možné efektivním způsobem rozhodnout, která z dílčích krychlí je ta pravá, tj. která obsahuje nekonečně mnoho bodů. Takovéto existenční důkazy (tzv. nekonstruktivní) byly a jsou terčem různých pochybovačů. V jádru všech výhrad leží nepochopení matematické logiky.

2 Cvičení

1. Pro jaké vektory $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ v euklidovském prostoru platí $|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| = \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|$?

2. Pro jaké vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ v euklidovském prostoru platí $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$?

3. Pomocí trojúhelníkové nerovnosti ukažte, že $|\,\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|\,| \le \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ (I tato nerovnost se někdy nazývá trojúhelníková, neboť je ekvivalentní s nerovností (iii) ve Větě1.1.)

4. Na základě trojúhelníkové nerovnosti stanovte horní odhad pro vzdálenost dvou bodů $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ v $\mathbb{R}^3$, nachází-li se $\boldsymbol{x}$ nejvýše ve vzdálenosti 2 od bodu $(1, 1, 1)$ a $\boldsymbol{y}$ ve vzdálenosti nejvýše 9 od bodu (100, 50, 50).

5. Odvoďte nerovnost $\| \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i \| \leq \sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{x}_i\|$ pro všechny vektory $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ z daného euklidovského prostoru !

6. Diametr množiny M je číslo definované

$$\operatorname{diam}(M) = \sup\{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}\| \mid \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M\}.$$

   Stanovte diametr množin $M = \{8\}$, $M = \langle 0, 1\rangle^3$ a $M = \langle 0, 1\rangle^4$. Jaký je diametr n-rozměrné krychle $\langle 0, 1\rangle^n$?

Určete vnitřek, hranici a uzávěr následujících množin:

7. $M = \{(x, y) \mid x^2 + 2x + y^2 \leq 3,\ x^2 - 4x + y^2 \leq 0\}$;

8. $M = \{(x, y, z) \mid x + y + z > 1\}$;

9. $M = \mathbb{Q}^3$, kde $\mathbb{Q}$ je množina všech racionálních čísel.

10. Sestrojte příklady množin v $\mathbb{R}^2$, že

    (i) nemá žádný vnitřní bod,
    (ii) nemá žádný hraniční bod,
    (iii) nemá žádný vnější bod,
    (iv) nemá žádný hromadný bod,
    (v) nemá žádný izolovaný bod.

11. Ukažte, že uzávěr každé množiny je sjednocení této množiny s množinou jejích hromadných bodů.

12. Stanovte hromadné body množiny $\{(1/n, 1/m) \mid n, m \in \mathbb{N}\}$.

13. Co je doplňkem uzávěru dané množiny?

14. Ukažte, že sjednocení otevřených množin je vždy otevřená množina. Platí stejné tvrzení i pro množiny uzavřené?

15. Ukažte, že průnik konečně mnoha otevřených množin je otevřená množina. Platí toto tvrzení i pro nekonečně mnoho otevřených množin? Odvoďte důsledky pro uzavřené množiny.

16. Nechť M a $\boldsymbol{x}$ jsou množina a bod v euklidovském prostoru. Je přirozené definovat vzdálenost $\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, M)$ bodu $\boldsymbol{x}$ od množiny M následujícím způsobem

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, M) = \inf\{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \mid \boldsymbol{y} \in M\}.$$

   Bod $\boldsymbol{y}_0 \in M$ se nazývá *nejbližší bod* bodu $\boldsymbol{x}$ v množině M (též nejlepší aproximace bodu $\boldsymbol{x}$ prvky množiny M), jestliže

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_0\| = \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, M).$$

   Rozhodněte, zda nejbližší bod vždy existuje.

17. (a) Ukažte, že bod $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je hraničním bodem množiny M právě, když

$$\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, M) = \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, \mathbb{R}^n \setminus M) = 0.$$

    (b) Čemu je rovna množina všech bodů, jejichž vzdálenost od dané množiny je nulová?

18. Použitím Věty 1.9 ukažte, že pro každý bod $\boldsymbol{x}$ a každou omezenou uzavřenou množinu M existuje nejbližší bod k bodu $\boldsymbol{x}$ v množině M.

19. Jaké jsou obojetné, tj. současně otevřené a uzavřené množiny v eukleidovském prostoru ?

20 Nechť $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ jsou body v $\mathbb{R}^3$. Definujme množinu

$$K = \Big\{ \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \boldsymbol{x}_i \;\Big|\; 0 \le \lambda_i \le 1, \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1 \Big\}.$$

Čemu je takováto množina rovna, neleží-li $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ na jedné přímce?

Výsledky

1. lineárně závislé; 2. lineárně závislé; 4. $11+\sqrt{14610}$; 6. 0, $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{n}$; 7. $M^o = \{(x,y) \mid x^2+2x+y^2 < 3,\ x^2+y^2-4x < 0\}$, $\partial M = \{(x,y) \mid x^2+2x+y^2 = 3, x \in \langle 0, 1/2\rangle\} \cup \{(x,y) \mid x^2-4x+y^2 = 0, x \in \langle 1/2, 1\rangle\}$, $\overline{M} = \{(x,y) \mid x^2+2x+y^2 \le 3,\ x^2+y^2-4x \le 0\}$; 8. $M^o = M$, $\partial M = \{(x,y,z) \mid x+y+z = 1\}$, $\overline{M} = \{(x,y,z) \mid x+y+z \le 1\}$; 9. $M^o = \emptyset$, $\partial M = \mathbb{R}^3$, $\overline{M} = \mathbb{R}^3$; 12. $(0,0), (1/n, 0), (0, 1/n), n \in \mathbb{N}$; 13. vnitřek doplňku; 14. neplatí; 15. neplatí; 16. nemusí existovat; 17. uzávěru dané množiny; 19. pouze $\emptyset$ a celý prostor; 20. trojúhelník s vrcholy $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$.