Kapitola 2

Funkce více proměnných

Ve vědních i technických oborech se často setkáváme s veličinami, jejichž hodnoty závisí na větším počtu proměnných. Objem válce je závislý na poloměru podstavy a výšce, tlak plynu na teplotě a objemu, zisk ekonomického subjektu na nákladech a ceně, napětí v elektrickém obvodu na hodnotách odporů, kapacit a indukčností jeho prvků, apod. Matematický aparát pro popis takovýchto závislostí v systémech s „konečně mnoha stupni volnosti“ poskytuje teorie funkcí více proměnných. Tato kapitola je základním úvodem do problematiky.

1 Základní pojmy

Funkce n-proměnných je zobrazení $f\colon M \to \mathbb{R}$ zobrazující jistou množinu M v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$ do množiny reálných čísel. Množina M se přitom nazývá *definiční obor* funkce f, který se často označuje symbolem $D(f)$. Pokud nebude definiční obor funkce specifikován, budeme jím rozumět maximální množinu, na které může být daná funkce definována.

Je-li $\boldsymbol{x} \in D(f)$ a má-li složky $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, pak symbol $f(\boldsymbol{x})$ znamená stručný zápis hodnoty $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Tento způsob zápisu budeme často používat.

Množina $f(M) = \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in M\}$ se nazývá *obor hodnot* funkce f (na množině M).

Příklad 2.1. (i) Uvažujme funkci dvou proměnných

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

(Jiný způsob zápisu této funkce je pomocí rovnice $z = x^2 + y^2$. Budeme se více držet první možnosti.) Tato funkce je definována v celém euklidovském prostoru $\mathbb{R}^2$. Její obor hodnot je množina všech nezáporných čísel.

(ii) Funkce

$$f(x, y, z) = \ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)$$

je funkcí tří proměnných. Je definována na množině všech uspořádaných trojic $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, pro něž je argument logaritmu kladný, tj. pro něž platí

$$x^2 + y^2 + z^2 < 1.$$

Definičním oborem je v tomto případě otevřená jednotková koule se středem v počátku souřadnic. Oborem hodnot je interval $(-\infty, 0\rangle$.

(iii) Funkce daná předpisem

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

je funkce n-proměnných. Platí přitom

$$D(f) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 x_2 \ldots x_n \geq 0\}.$$

Zde je definiční obor již složitější množina. V případě roviny, tj. $n = 2$, je to 1. a 3. kvadrant. Pro prostor ($n = 3$) se $D(f)$ skládá už ze čtyř z celkového počtu osmi oktantů. V obecném $\mathbb{R}^n$ je definiční obor složen z 2^{n-1} částí a každá z nich je tvořena takovými body $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, které mají přesně sudý počet záporných složek.

Obor hodnot je interval $\langle 0, \infty\rangle$.

K popisu funkcí více proměnných je často užitečné stanovit množiny, ve kterých funkce nabývají stejné hodnoty. Tyto množiny nazýváme *konstantními hladinami*. Z konkrétních situací je známe jako vrstevnice, izotermy, izobary, ekvipotenciální hladiny, apod.

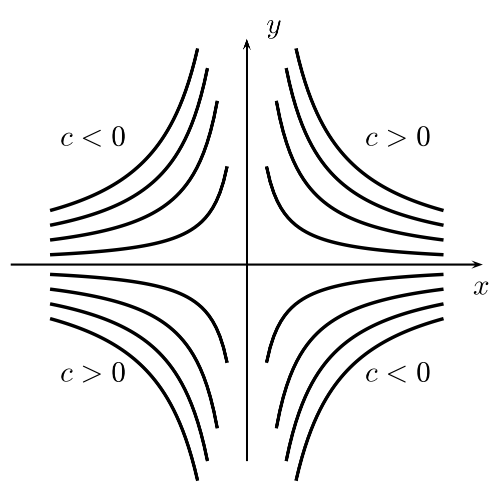
Příklad 2.2. (i) Uvažujme funkci

$$f(x, y) = xy.$$

Hladiny konstantnosti, příslušící danému $c \in \mathbb{R}$ jsou množiny

$$H_c = \{(x, y) \mid xy = c\}.$$

Pro hodnotu $c = 0$ dostáváme sjednocení souřadnicových os, pro nenulová c hyperboly mající souřadnicové osy jako asymptoty. Soustava konstantních hladin je znázorněna na obr. 2.1.



Obr. 2.1

(ii) Podívejme se na konstantní hladiny a definiční obor funkce

$$f(x,y,z) = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Výraz v argumentu funkce arcsin musí být v absolutní hodnotě nejvýše jedna. Tedy

$$D(f) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{|z|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1, (x,y) \neq (0,0) \right\}.$$

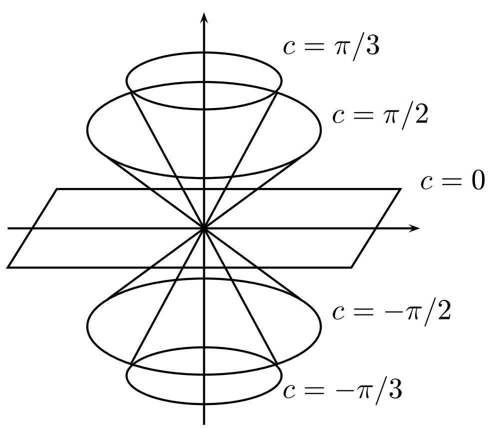
Pro body z definičního oboru proto platí, že absolutní hodnota poměru z-tové souřadnice a vzdálenosti od osy z nesmí přesáhnout hodnotu 1. Geometricky to znamená, že definiční obor je sjednocením dvou kuželů, jejichž osou je osa z , vrchol je v počátku a vrcholový úhel je pravý. Samotný počátek souřadnic přitom do definičního oboru nepatří. Obor hodnot funkce arcsin je interval $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$. Zvolme $c \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$. Konstantní hladina H_c příslušná této hodnotě je množina všech řešení rovnice

$$\arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = c,$$

nebo ekvivalentně

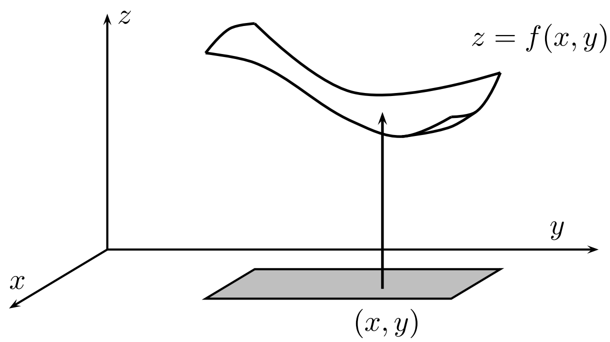
$$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin c.$$

Hladina H_c je tedy kuželovou plochou s vrcholem v počátku a osou z z níž je vyjmut bod $(0,0,0)$. Výjimkou je případ $c = 0$, ve kterém dostaneme souřadnicovou rovinu xy bez počátku, viz obr.2.2.



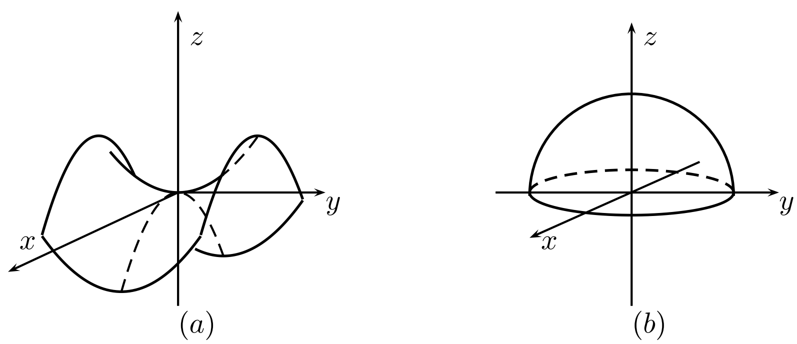
Obr. 2.2

Funkce jedné proměnné bývá často znázorňována grafem v rovině. Podobným způsobem je možno geometricky vyjádřit i funkci dvou proměnných $f(x,y)$. Tentokrát ovšem v prostoru třírozměrném. Pro daný bod (x,y) v základní souřadnicové rovině xy můžeme hodnotu funkce $f(x,y)$ nanést na vertikálu procházející bodem (x,y) – viz. obr. 2.3. Získáme tak množinu $\mathrm{Graf}(f) = \{(x,y,z) \mid z = f(x,y),\ (x,y) \in D(f)\}$, kterou nazýváme *grafem funkce* f. Průmět grafu do souřadnicové roviny xy je přitom definiční obor dané funkce. V případě jednodušších funkcí se často podaří stanovit graf pomocí znalostí analytické geometrie v prostoru. V komplikovanějších případech mohou pomoci počítačové programy.



Obr. 2.3.

Příklad 2.3. (i) Pokusme se znázornit graf funkce $f(x, y) = y^2 - x^2$. Průsečíkem grafu této funkce s rovinou xy jsou přímky $y = x$ a $y = -x$. Soustava ostatních vrstevnic je dána soustavou hyperbol, jejichž vrcholy leží na osách x a y. Řez grafu rovinou o rovnici $y = 0$ je parabola $z = -x^2$. Podobně v rovině $x = 0$ je řezem parabola $z = y^2$. Tyto paraboly spolu se soustavou vrstevnic napovídají, že graf má tvar sedla znázorněného na obr. 2.4(a).



Obr. 2.4

(ii) Vyšetřujme funkci $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Definiční obor této funkce je uzavřený jednotkový kruh se středem v počátku. Graf je popsán algebraicky podmínkami

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

ekvivalentně

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0.$$

Odtud vidíme, že grafem je horní část kulové plochy se středem v počátku a poloměrem jedna, obr. 2.4(b).

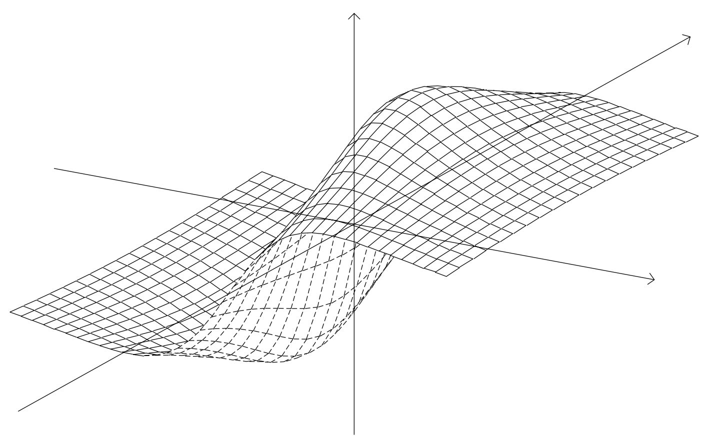
(iii) Znázorněme graf funkce

$$f(x, y) = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}.$$

Funkce f je definována na celé množině $\mathbb{R}^2$. Identita

$$f(-x,-y) = -f(x,y)$$

říká, že grafem je plocha souměrná vzhledem k počátku. Použitím systému gnuplot je znázorněna na obr. 2.4.



Obr. 2.4

Kromě funkcí s více proměnnými hrají v teorii i aplikacích důležitou úlohu i obecnější objekty — zobrazení mezi euklidovskými prostory. Řešíme-li například soustavu n lineárních rovnic o n neznámých, pak řešení je n-tice čísel (výstup), která závisí na n^2 koeficientech soustavy a n absolutních členech (vstup). Proces řešení tedy můžeme chápat jako zobrazení z prostoru $\mathbb{R}^{n^2+n}$ do prostoru $\mathbb{R}^n$. Explicitní podoba tohoto zobrazení je dána Cramerovým pravidlem. Jiný příklad si můžeme vypůjčit z elementární teorie pole. Podle Newtonova gravitačního zákona můžeme gravitační silové pole vytvořené jednotkovým hmotným bodem umístěným v počátku popsat zobrazením $F\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3$. Hodnota $F(x,y,z)$ přitom udává vektor intenzity pole v bodě (x,y,z), tj. vektor

$$F(x,y,z) = \frac{-\kappa}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}(x,y,z),$$

kde κ je gravitační konstanta. Každé zobrazení $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je možno přirozeně reprezentovat pomocí k-tice funkcí n- proměnných $F_1(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $F_2(x_1,x_2,\dots,x_n)$, …, $F_k(x_1,x_2,\dots,x_n)$ definovaných rovností

$$(2.1)\quad F(x_1,x_2,\dots,x_n) = \Big(F_1(x_1,x_2,\dots,x_n), F_2(x_1,x_2,\dots,x_n),\dots,F_k(x_1,x_2,\dots,x_n)\Big).$$

Funkce $F_1,\dots,F_k$ nazýváme *složkami zobrazení* F. Zobrazení F popisující výše uvedené gravitační pole má např. složky

$$\begin{aligned} F_1(x,y,z) &= \frac{-\kappa x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}, \\ F_2(x,y,z) &= \frac{-\kappa y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}, \\ F_3(x,y,z) &= \frac{-\kappa z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}. \end{aligned}$$

Důležitým typem zobrazení mezi euklidovskými prostory je zobrazení lineární, které je studováno v Lineární algebře. Protože tento typ zobrazení budeme často používat, připomeneme si na tom místě jeho definici a základní vlastnosti.

Lineární zobrazení $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je zobrazení, které splňuje následující podmínku:

$$F(\lambda_1 \boldsymbol{x} + \lambda_2 \boldsymbol{y}) = \lambda_1 F(\boldsymbol{x}) + \lambda_1 F(\boldsymbol{y})$$

pro všechna $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. Každé lineární zobrazení $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je přitom možno vyjádřit ve tvaru

$$F(\boldsymbol{x}) = \mathbf{A}\boldsymbol{x}, \tag{2.2}$$

kde $\mathbf{A}$ je jednoznačně určená matice typu $k \times n$ (k-řádků, n-sloupců). Součin v (2.2) přitom chápeme jako maticový součin matice $\mathbf{A}$ se sloupcovým vektorem $\boldsymbol{x}$. Matici $\mathbf{A}$ budeme nazývat *maticí lineárního zobrazení F*.

2 Cvičení

Úloha: Nalezněte definiční obor funkce

$$f(x,y) = \ln\left(\frac{x^2+2x+y^2}{x^2-2x+y^2}\right).$$

Řešení: Výraz v argumentu logaritmu musí být kladný, a proto

$$0 < \frac{x^2+2x+y^2}{x^2-2x+y^2} = \frac{(x+1)^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2-1}.$$

Tedy

$$\begin{aligned} (x+1)^2+y^2-1 &> 0 \quad \text{a} \\ (x-1)^2+y^2-1 &> 0; \end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned} (x+1)^2+y^2-1 &< 0 \quad \text{a} \\ (x-1)^2+y^2-1 &< 0. \end{aligned}$$

První alternativa reprezentuje množinu K, která je vnějškem sjednocení dvou kruhů se středy v bodech $(-1,0)$ a $(1,0)$ a poloměry 1. Druhá alternativa popisuje prázdnou množinu. Definiční obor je proto množina K.

Úloha: Ve výrobním procesu jsou náklady rozděleny na částku L určenou na mzdy a částku K určenou na ostatní výdaje (investice, suroviny, apod.). Ekonomové odvodili, že v některých případech je celková výroba $F(L,K)$ při daném rozložení nákladů dána tzv. Cobb-Douglasovou funkcí produkce

$$F(L,K) = cL^aK^{1-a},$$

kde c, a, $0 < a < 1$ jsou konstanty dané konkrétními podmínkami. Ukažte, že zvětší-li se k-krát obě složky nákladů, zvětší se k-krát i celková produkce. Jak se změní produkce klesnou-li mzdy na polovinu a zdvojnásobí-li se ostatní náklady?

Řešení: Platí

$$F(kK,kL) = ck^aL^ak^{1-a}K^{1-a} = kcL^aK^{1-a} = kF(L,K).$$

Analogicky,

$$F\Big(\frac{L}{2}, 2K\Big) = c\frac{L^a}{2^a}2^{1-a}K^{1-a} = c\,2^{1-2a}F(L,K).$$

Produkce bude 2^{1-2a} násobek produkce původní.

Úloha: Teplota $T(x,y)$ v bodě (x,y) roviny je dána vztahem

$$T(x,y) = 20 + x^2 + 4y^2.$$

Určete v jakém rozmezí se teplota pohybuje a stanovte izotermy.

Řešení: Jistě platí $T(x,y) \geq 20$. Výraz $x^2 + 4y^2$ může nabýt libovolné nezáporné hodnoty. Obor hodnot funkce T je tudíž interval $\langle 20, \infty)$.

Zvolme $c > 20$. Izoterma je pak křivka o rovnici

$$20 + x^2 + 4y^2 = c.$$

Po úpravě

$$\frac{x^2}{c-20} + \frac{y^2}{\frac{c-20}{4}} = 1.$$

Analytická geometrie říká, že tato rovnice reprezentuje elipsu se středem v počátku a poloosami $\sqrt{c-20}$, $\frac{\sqrt{c-20}}{2}$. Soustava izoterm je tedy soustavou elips se středy v počátku, jejichž x-ová poloosa je dvakrát větší než $y-$nová. Výjimkou je případ $c = 20$, kterému odpovídá jednobodová izoterma $\{(0,0)\}$.

Úloha: Nalezněte definiční obor, konstantní hladiny a obor hodnot funkce čtyř proměnných

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\frac{1}{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-1}.$$

Řešení: Funkci f můžeme vyjádřit přehledněji ve tvaru

$$f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|^2-1}.$$

Je zřejmé, že $D(f)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4 \mid \|\boldsymbol{x}\|\neq 1\}$. Protože norma $\|\boldsymbol{x}\|$ nabývá libovolné nezáporné hodnoty, je díky označení $t=\|\boldsymbol{x}\|$ obor hodnot funkce f stejný jako obor hodnot pomocné funkce

$$g(t)=\frac{1}{t^2-1}$$

definované na intervalu $\langle 0,1)\cup(1,\infty)$. Funkce g je na intervalu $\langle 0,1)$ klesající s limitami v krajních bodech $g(0)=-1$, $\lim_{t\to 1-} g(t)=-\infty$. Na intervalu $(1,\infty)$ je také klesající s limitami v krajních bodech $\lim_{t\to 1+} g(t)=\infty$, $\lim_{t\to\infty} g(t)=0$. Závěrem tedy můžeme konstatovat, že obor hodnot funkce f je množina $(-\infty,-1\rangle\cup(0,\infty)$.

Konstantní hladina odpovídající hodnotě $c\notin(-1,0)$ je dána rovnicí

$$\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|^2-1}=c.$$

Po úpravě

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\frac{1}{c}+1}.$$

Každá konstantní hladina je hranice čtyřrozměrné koule se středem v počátku a poloměrem $\sqrt{1+1/c}$.

Úloha: Předpokládejme, že vrstevnice funkce $f(x,y)$ jsou soustředné kružnice, jejichž poloměr se pohybuje v intervalu $(0,r)$, $r\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$. Vrstevnice odpovídající hodnotě $f(0,0)$ je $\{(0,0)\}$. Ukažte, že graf funkce f je rotační plocha, která vznikne rotací grafu jisté funkce jedné proměnné kolem osy z. Ukažte dále, že funkce s touto vlastností jsou právě funkce tvaru

$$f(x,y)=g(\sqrt{x^2+y^2}),$$

kde g je definována na intervalu $\langle 0,r)$, $r\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$.

Řešení: Jsou-li vrstevnice výše popsané soustředné kružnice pak graf funkce $f(x,y)$ se nezmění při rotaci kolem osy z. Skutečně se tedy jedná o rotační plochu, kterou získáme rotací *libovolného* řezu grafu funkce rovinou, která je kolmá na rovinu xy a prochází počátkem. Například je možno volit rovinu o rovnici $y=0$ (souřadnicová rovina xz) a popsat tak graf funkce jako výsledek rotace grafu pomocné funkce $h(x)=f(x,0)$ nakresleného v rovině xz.

Druhá část úlohy je jednoduchá. Soustředné kružnice se středem v počátku mají za vrstevnice právě ty funkce, jejichž hodnota závisí výhradně na vzdálenosti od počátku – tedy na výrazu $\sqrt{x^2+y^2}$. Proto můžeme takovéto funkce jednodušeji reprezentovat ve tvaru $g(\sqrt{x^2+y^2})$, kde g je definována na jistém intervalu $\langle 0, r)$, $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$.

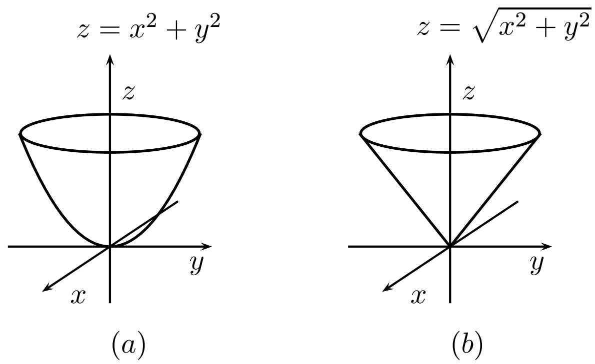
Úloha: Popište grafy následujících funkcí:

(i) $f(x,y) = x^2 + y^2$;

(ii) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$;

(iii) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2-2x-4y-4}$.

Řešení: (i) Zadání funkce bezprostředně odpovídá předchozí úloze. Její graf je proto útvar, který vznikne rotací paraboly $z = f(x,0) = x^2$ ležící v rovině xz kolem osy z. Výsledkem je povrch rotačního paraboloidu znázorněný na obr. 2.5(a).



Obr. 2.5

(ii) Zde graf vznikl rotací funkce $z = f(x,0) = |x|$. Výsledná plocha je kuželová a je na obr.2.5(b)

(iii) Podívejme se, jak vypadají vrstevnice funkce $f(x,y)$. Pro body (x,y) ležící na vrstevnici odpovídající hodnotě $c > 0$ máme rovnici

$$e^{-x^2-y^2-2x-4y-4} = c. \tag{2.3}$$

Čtenář obeznámený s analytickou geometrií v rovině již asi vidí, že se musí jednat o kružnice. Skutečně, po doplnění na mocniny dvojčlenů a úpravě získáme exponent ve tvaru

$$-x^2 - y^2 - 2x - 4y - 4 = -(x+1)^2 - (y+2)^2 + 1.$$

Vrátíme-li se k rovnici (2.3) máme

$$e^{-(x+1)^2-(y+2)^2+1} = c,$$

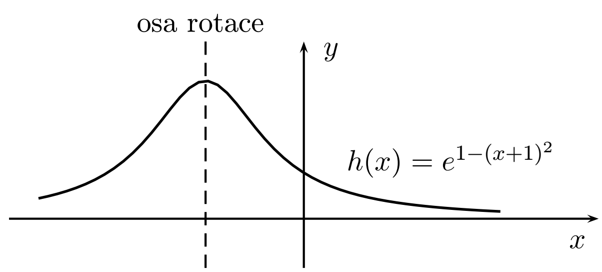
a po úpravách

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = -\ln\left(\frac{c}{e}\right).$$

Bude-li $c > e$ je výraz na pravé straně v předchozí rovnici záporný, což znamená, že rovnice řešení nemá. Na druhé straně, je-li $0 < c \leq e$ popisuje získaná rovnice systém soustředných kružnic se středem v bodě $(-1, -2)$ a poloměrem $\sqrt{-\ln(c/e)}$. V případě $c = e$ kružnice degeneruje na bod $(-1, -2)$. Oborem hodnot funkce f jsou tedy přípustné hodnoty c, tj. interval $(0, e\rangle$. Podobně jako v předchozí úloze vidíme, že graf vznikne rotací jisté křivky, tentokrát kolem osy rovnoběžné s osou z a procházející bodem $(-1, -2)$. Tuto křivku nalezneme jako průnik libovolné roviny kolmé na podstavu xy a procházející bodem $(-1, -2)$. Volba roviny o rovnici $y = -2$ dá

$$z = f(x, -2) = e^{-(x+1)^2+1} = ee^{-(x+1)^2} = h(x).$$

Graf funkce h je znázorněn na obrázku 2.6.



Obr. 2.6

Graf funkce f vznikne rotací grafu funkce h kolem příslušné osy. Získáme tak útvar připomínající sopku Vesuv s vrcholem $(-1, -2, e)$.

Úloha: Nadmořská výška terénu v bodě $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ je dána funkcí

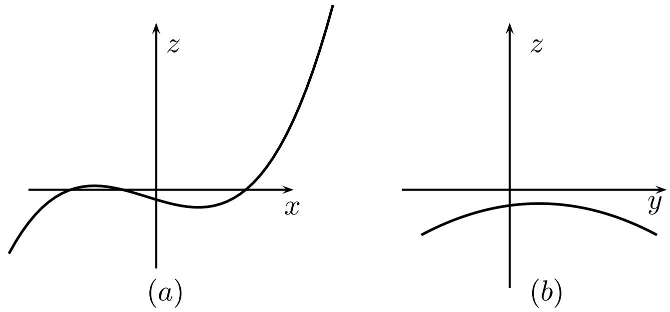
$$f(x, y) = x^3 + x^2 - y^2 - 9x + 2y - 10.$$

Určete reliéf terénu, jestliže se vydáme z bodu $(0, 0)$ ve směru (i) přímky s rovnicí $y = 2$, (ii) přímky s rovnicí $x = 2$.

Řešení: (i)

$$f(x, 2) = x^3 + x^2 - 9x - 10.$$

Dostáváme tak funkci jedné proměnné (polynom třetího stupně), jejíž graf je znázorněn na obr. 2.7(a).



Obr. 2.7

a představuje hledaný výškový profil.

(ii) Analogicky jako výše

$$f(2,y) = -y^2 + 2y - 16.$$

Reliéfem terénu je tentokrát parabola nakreslená na obr. 2.7(b). Řezy grafem funkce f v různých směrech jsou tedy dány funkcemi odlišných typů. Povšimněme si také skutečnosti, že řezy grafem funkce f odpovídajícími v půdoryse pravoúhlé síti $x = c, y = c$ jsou pouze posunutím grafů na obr. 2.7(a) a (b) a to ve vertikálním směru. Na graf funkce f se tedy z jedné strany můžeme dívat jako na sjednocení navzájem posunutých křivek třetího stupně a z druhé strany jako na sjednocení navzájem posunutých parabol. (Tento typ grafu je rovněž na obrázku 7.4).

Určete definiční obory následujících funkcí

1. $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$;
2. $f(x,y) = \sqrt{\sin x \cos y}$;
3. $f(x,y) = \dfrac{1}{25 - x^2 - y^2}$;
4. $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$;
5. $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}}$;
6. $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2 - x}{-x^2 - y^2 + 2x}}$;
7. $f(x,y,z) = \dfrac{x}{|y+z|}$;
8. $f(x,y) = \ln(x \sin y)$;
9. $f(x,y) = \arcsin(x+y)$;

10. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \ln(x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 36)$.

11. Ukažte, že $F(tx, ty) = t^3 F(x, y)$, kde $F(x, y) = 3x^2 y - \sqrt{x^6 - y^6}$.

12. Nalezněte funkci $f(x)$, je-li (i) $f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x\sqrt{x^2+y^2}}{y^2}$, $x > 0, y \neq 0$ a (ii) $f\left(\frac{x^2}{y}\right) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$, $y \neq 0$.

13. Nalezněte konstantní hladiny funkce

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2}} \quad a > 0.$$

14. Pro n grammolekul ideálního plynu platí, že tlak p je roven $p = \dfrac{nRT}{V}$, kde R je konstanta, T je teplota a V je objem. Popište izobary.

15. Dle Poiseuilleho zákona z fyziologie je odpor R krevní cévy délky l a poloměru r dán vztahem $R = \dfrac{\alpha l}{r^4}$, $\alpha > 0$. Při jakých hodnotách l a r zůstává tento odpor konstantní?

16. V závislosti na parametru α stanovte typ konstantní hladiny funkce $f(x, y) = e^{\alpha x^2 + y^2 - 2y + 1}$.

17. Ukažte, že každá funkce dvou proměnných, jejíž konstantní hladiny jsou systémem hyperbol $y = \dfrac{k}{x}$, $k > 0$ je tvaru $f(x, y) = g(xy)$.

Načrtněte grafy následujících funkcí:

18. $f(x, y) = x^2 + 3y^2$;

19. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;

20. $f(x, y) = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$;

21. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$;

22. $f(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$, $a, b > 0$;

23. $f(x, y) = \sqrt{1 - y^2}$;

24. $f(x, y) = x^2$;

25. $f(x, y) = |x - y + 1|$;

26. $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2}$;

27. $f(x, y) = \dfrac{2y}{x^2 + y^2}$;

28. Určete funkci dvou proměnných, jejíž graf vznikne rotací funkce $z = \sqrt{x}$ kolem osy z.

29. Pohybujeme se na ploše, která je grafem funkce $f(x,y) = x^2 - 3xy^2 + 15$. Výchozí poloha je bod $(1,1,13)$. Určete směr největšího a nejmenšího stoupání. Návod: porovnejte mezi sebou derivace funkcí, které vzniknou příslušnými řezy grafu funkce f.

30. Vyšetřete, jak typ hladiny konstantnosti lineární zobrazení $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ závisí na hodnosti $h(\boldsymbol{A})$ matice $\boldsymbol{A}$, která reprezentuje lineární zobrazení F.

Výsledky

1. $\langle -1,1\rangle^2$; 2. $\bigcup_{k,l,r,s\in Z} \langle 2k\pi, (2k+1)\pi\rangle \times \langle 2l\pi - \frac{\pi}{2}, 2l\pi + \frac{\pi}{2}\rangle \cup \langle -\pi + 2r\pi, 2r\pi\rangle \times \langle \frac{\pi}{2} + 2s\pi, \frac{3}{2}\pi + 2s\pi\rangle$; 3. $x^2 + y^2 \neq 25$ — vše mimo kružnici; 4. uzavřený kruh $x^2 + y^2 \leq 9$; 5. otevřená koule $x^2 + y^2 + z^2 < 4$; 6. otevřený kruh se středem v bodě (1,0) a poloměrem 1 bez otevřeného kruhu se středem v bodě (1/2, 0) a poloměrem 1/2; 7. $\mathbb{R}^3$ bez roviny $y + z = 0$; 8. $x > 0$, $2k\pi < y < (2k+1)\pi$, $x < 0$ $(2k+1)\pi < y < (2k+2)\pi$; 9. pás $-1 - x \leq y \leq 1 - x$, $x \in \mathbb{R}$; 10. vnějšek koule — $\|\boldsymbol{x}\| > 6$; 12. (i) $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$, (ii) $f(x) = x/(1+x^2)$; 13. kružnice se středy na ose x a přímka $x = 0$; 14. přímky procházející počátkem; 15. parabola čtvrtého stupně; 16. $\alpha = 1$ — kružnice se středy na ose y, $\alpha > 0$ — elipsy, $\alpha < 0$ — hyperboly, $\alpha = 0$ — přímky rovnoběžné s osou x; 18 eliptický paraboloid; 19. kuželová plocha; 20. rotační plocha s osou rotace z vzniklá rotací hyperboly $z = \sqrt{4 + y^2}$ — jednodílný rotační hyperboloid; 21. rotační plocha vzniklá rotací části hyperboly $z = \sqrt{y^2 - 1}$, $z \geq 0$ kolem osy z; 22. horní část elipsoidu se středem v počátku a poloosami a, b, c; 23. horní část válce s osou x a poloměrem 1; 24. parabolická plocha — všechna posunuti paraboly $z = x^2$ rovnoběžně s osou y; 25. části dvou rovin; 26. rotace grafu funkce $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ kolem osy $x = -1, y = 1$; 27. sjednocení křivek $z = \frac{2c}{x^2+c^2}$ ležící v rovinách $y = c$, $c \in (-\infty, \infty)$; 28. $f(x,y) = \sqrt[4]{x^2 + y^2}$; 29. $(-1,-6)$ — největší stoupání, $(1,6)$ — největší klesání; 30. Je-li $h(\boldsymbol{A}) = 3$, hladiny konstantnosti jsou body; pro $h(\boldsymbol{A}) = 2$ to jsou přímky; pro $h(\boldsymbol{A}) = 1$ roviny a pro $h(\boldsymbol{A}) = 0$ je hladina konstantnosti $\mathbb{R}^3$.