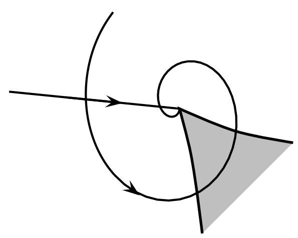
Kapitola 3

Limita a spojitost funkcí více proměnných

1 Limita funkcí

Limita popisuje chování hodnot vyšetřované funkce, blížíme-li se k danému bodu. V případě funkce definované na reálné ose se k danému bodu můžeme přibližovat zprava, zleva nebo současně z obou stran. Tomu v jedné proměnné odpovídají pojmy limita zleva, limita zprava a limita oboustranná. Již v případě funkce dvou proměnných, tedy funkce definované v rovině, máme mnohem více možností, jak se k danému bodu blížit, viz obrázek 3.1.



Obr. 3.1

Do libovolné blízkosti bodu v rovině se můžeme dostat po polopřímkách, spirálách, kruhových výsečích, apod. Abychom postihli všechny tyto možnosti v jedné univerzální definici, budeme definovat pojem limity vzhledem k množině. V ostatním je definice vícerozměrné limity zcela stejná jako v případě funkce jedné proměnné.

Definice 3.1. *Nechť f je funkce definovaná na podmnožině N euklidovského prostoru. Předpokládejme, že bod $\boldsymbol{a}$ je hromadným bodem množiny N. Řekneme, že* **funkce f má v bodě $\boldsymbol{a}$ limitu** $b \in \mathbb{R}$ *(vzhledem k množině N), píšeme*

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x} \in N}} f(\boldsymbol{x}) = b,$$

jestliže pro každé okolí $U(b)$ bodu b existuje prstencové okolí $P(\boldsymbol{a})$ bodu $\boldsymbol{a}$, že $f(P \cap N) \subset U$. Vyjádřeno pomocí nerovností to znamená, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že platí následující implikace

$$0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta, \ \boldsymbol{x} \in N \Longrightarrow |f(\boldsymbol{x}) - b| < \varepsilon.$$

Použijeme-li zápis $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})$ bez specifikování množiny N, budeme tím rozumět limitu funkce vzhledem k jejímu definičnímu oboru. Funkce f nemusí být v limitním bodě $\boldsymbol{a}$ definována, tento bod však musí být hromadným bodem jejího definičního oboru.

Příklad 3.2. Budeme se zabývat limitou funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|$$

v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Protože $D(f)$ je celý prostor $\mathbb{R}^n$, není třeba uvádět, vzhledem k jaké množině limitu počítáme. Z geometrického názoru je zřejmé, že tato limita je rovna normě $\|\boldsymbol{a}\|$. Ověříme si tuto hypotézu přímo z Definice 3.1. K tomu je zapotřebí ukázat, že k libovolně zvolenému okolí U bodu $\|\boldsymbol{a}\|$ (řekněme o poloměru ε) existuje prstencové okolí P bodu $\boldsymbol{a}$ (řekněme o poloměru δ) tak, že pro všechna $\boldsymbol{x} \in P$ je $f(\boldsymbol{x}) \in U$. Zapsáno pomocí nerovností

$$0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta \Rightarrow \big|\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{a}\|\big| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Díky trojúhelníkové nerovnosti (viz cvičení 3, Kap. 1) máme

$$\big|\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{a}\|\big| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|.$$

Implikace v (3.1) bude splněna např. při volbě $\delta = \varepsilon$. Závěrem vidíme, že

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{a}\|$$

pro každé $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$.

Zcela stejně jako v případě funkce jedné proměnné je možno ukázat, že funkce má nejvýše jednu limitu. Předpokládejme, že $\lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x} \in N}} f(\boldsymbol{x}) = b$ a že $M \subset N$. Je-li bod $\boldsymbol{a}$ rovněž hromadným bodem množiny M, pak se nutně musíme dostat ke stejné hodnotě b, budeme-li se k bodu $\boldsymbol{a}$ blížit pouze pomocí bodů množiny M. Má-li tedy například funkce f limitu v daném bodě, pak musí mít stejnou limitu vzhledem ke všem podmnožinám svého definičního oboru. Tuto skutečnost často používáme při vyšetřování existence limity a stanovení její možné hodnoty.

Příklad 3.3. (i) Zabývejme se limitami funkce

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} \text{ v bodě } (0, 0).$$

Uvažujme nejdříve limity vzhledem k přímce $y = kx$. Podívejme se na hodnoty funkce f na přímce $y = kx$:

$$f(x, kx) = \frac{x^2 k^2 x^2}{x^4 + k^4 x^4} = \frac{k^2}{1 + k^4}.$$

Funkce f je na této přímce konstantní. Její limita vzhledem k přímce $y = kx$ je

$$\frac{k^2}{1+k^4}.$$

Pro různé hodnoty k tyto limity vycházejí různě, a proto $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nemůže existovat.

(ii) Vyšetřujme existenci limity funkce

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2} \text{ v bodě } (0,0).$$

Stejně jako dříve budeme zkoumat limity vůči přímkám $y = kx$. Pro $k \neq 0$ dostaneme

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3k}{x^4+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx}{x^2+k^2} = 0.$$

Protože f má hodnotu nula na souřadnicových osách, můžeme konstatovat, že f má nulovou limitu na všech přímkách procházejících počátkem. To nás ovšem ještě neopravňuje tvrdit, že f má nulovou dvojrozměrnou limitu v tomto bodě. Uvažujeme-li totiž limity pouze po přímkách klesá x i y k nule lineárně, tedy rychlostí „stejného řádu“. Bude-li však konvergence x-ových a y-nových souřadnic rozdílná, může se chování výrazu

$$\frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

v blízkosti nuly výrazně změnit. Uvažujme například parabolu $y = x^2$. Pohybem po této křivce klesá x s mocninou první zatímco y s mocninou druhou. Pro limitu vůči parabole máme

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}.$$

Tato limita se ovšem liší od limit po přímkách, a proto f nemá limitu v $(0,0)$.

Tento příklad ilustruje jev, se kterým se ještě setkáme vícekrát a který nemá analogii v jednorozměrném případě. Asymptotické chování funkce vůči přímkám ještě nezaručuje stejné asymptotické vícerozměrné chování funkce.

Při výpočtu vícerozměrných limit často používáme pravidla shrnutá v následující větě. Jejich důkazy jsou naprosto stejné jako v případě funkce jedné proměnné, a proto je nebudeme uvádět.

Věta 3.4. *Nechť f a g jsou funkce definované na stejné množině v euklidovském prostoru. Předpokládejme, že $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = b$, $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = c$. Pak platí následující tvrzení:*

(i) $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}(f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})) = b + c$.

(ii) $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x}) = bc$.

(iii) $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \dfrac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})} = \dfrac{b}{c}$, *za předpokladu, že $c \neq 0$.*

(iv) *Nechť existuje* $\lim_{t\to b} h(t)$ *a nechť existuje prstencové okolí* $P(\boldsymbol{a})$ *bodu* $\boldsymbol{a}$*, že* $f(\boldsymbol{x}) \neq b$ *pro* $\boldsymbol{x} \in P$*. Pak*

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} h(f(\boldsymbol{x})) = \lim_{t\to b} h(t).$$

(v) *Je-li* $f \leq g$ *na jistém prstencovém okolí bodu* $\boldsymbol{a}$*, pak* $b \leq c$*.*

(vi) *Je-li* f *omezená na jistém prstencovém okolí bodu* $\boldsymbol{a}$ *a současně* $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = 0$*, pak i* $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x}) = 0$*.*

(vii) *Platí-li pro funkci* h *na jistém prstencovém okolí bodu* $\boldsymbol{a}$ *nerovnost* $f \leq h \leq g$ *a je-li přitom* $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x})$*, pak* $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} h(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})$*.*

Příklad 3.5. (i) Stanovme limitu funkce $f(x, y, z) = x^2yz$ v bodě $(2, 2, 1)$. Podle bodu (ii) Věty 3.4 je výpočet jednoduchý

$$\lim_{(x,y,z)\to(2,2,1)} x^2yz = \lim_{(x,y,z)\to(2,2,1)} x^2 \lim_{(x,y,z)\to(2,2,1)} y \lim_{(x,y,z)\to(2,2,1)} z = 4 \cdot 2 \cdot 1 = 8.$$

(ii) Stanovme limitu

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Můžeme využít skutečnosti, že $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} x^2 + y^2 + z^2 = 0$ a provést substituci $t = x^2 + y^2 + z^2$. Aplikací pravidla (iv) Věty 3.4, kde položíme $h(t) = \dfrac{\sin t}{t}$, dostaneme

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

(iii) Určeme limitu

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} x \sin \frac{1}{x - y + z}.$$

Na základě odhadu

$$\left|\sin \frac{1}{x - y + z}\right| \leq 1$$

a skutečnosti, že $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} |x| = 0$, máme podle Věty 3.4 (vi), že

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} x \sin \frac{1}{x - y + z} = 0.$$

Pro výpočet vícerozměrných limit neexistuje žádná analogie „mechanického“ l' Hospitalova pravidla, které máme k dispozici pro reálné funkce. Příklady jsou proto více výzvou pro naši intuici. Při jejich řešení musíme často kombinovat pravidla Věty 3.4 s vyšetřováním limit vůči podmnožinám. Zjistíme-li například limitu funkce vůči některé přímce, pak celková limita je jí buďto rovna anebo vůbec neexistuje.

2 Spojitost funkcí

Intuitivní představa spojitosti zobrazení je vlastnost, že body ležící blízko sebe se zobrazí opět na body s malou vzdáleností. Tuto představu lze matematicky precizovat pomocí pojmu limity zcela stejně jako v případě teorie funkcí jedné proměnné.

Definice 3.6. *Nechť $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ je funkce daná na množině M euklidovského prostoru. Řekneme, že funkce f je* **spojitá v bodě** $\boldsymbol{x}_0 \in M$*, jestliže je bod $\boldsymbol{x}_0$ buďto izolovaný bod množiny M nebo platí, že*

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{x}\in M}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0).$$

Funkce f je **spojitá***, je-li spojitá v každém bodě svého definičního oboru.*

Protože každý bod množiny M je buď izolovaný bod množiny M nebo hromadný bod množiny M, máme pojem spojitosti definovaný pro *všechny* body z M.

Přepíšeme-li definici spojitosti pomocí okolí, dostaneme následující ekvivalentní vyjádření: f je spojitá v $\boldsymbol{x}_0$, jestliže pro každé okolí $U(f(\boldsymbol{x}_0))$ bodu $f(\boldsymbol{x}_0)$ existuje okolí $V(\boldsymbol{x}_0)$ bodu $\boldsymbol{x}_0$, že

$$f(V(\boldsymbol{x}_0)) \subset U(f(\boldsymbol{x}_0)).$$

Tato verze je občas výhodnější než vyjádření pomocí limity.

Větu 3.4 o limitách funkcí můžeme pro spojité funkce přeformulovat následovně.

Věta 3.7. *Nechť f a g jsou spojité funkce. Pak $f+g$, fg a $\dfrac{f}{g}$ (při $g \neq 0$) jsou opět spojité. Je-li h spojitá funkce jedné proměnné, pak složená funkce $h(f)$ je spojitá.*

Věta 3.7 říká, že jakoukoli manipulací se spojitými funkcemi, která zahrnuje konečně mnoho aritmetických operací a vytváření složených funkcí, dostaneme opět spojitou funkci. Z těchto důvodů je například funkce

$$f(x,y,z) = \frac{\operatorname{argsinh}(x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} e^{-\operatorname{tg}(xyz)} + \cos(xy)$$

spojitá ve svém definičním oboru.

Příklad 3.8. (i) Funkce $f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|$ je spojitá v celém euklidovském prostoru. Tato skutečnost je důsledkem Příkladu 3.2. Jiné zdůvodnění plyne také z Věty 3.7.

(ii) Každá lineární funkce je spojitá. Taková funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je vždy tvaru

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n,$$

kde $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Bezprostředně z Věty 3.7 vidíme, že funkce f je spojitá.

V následujícím příkladě uvedeme ukázky nespojitých funkcí.

Příklad 3.9. (i) Funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

je nespojitá ve všech bodech ležících na ose y. Důvodem je neexistence limity v žádném bodě na ose y. Graf po částech konstantní funkce f má zlom podél osy y.

(ii) Funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

nemá dle Příkladu 3.3 (i) limitu v bodě $(0,0)$. Proto nemůže být v tomto bodě spojitá, ačkoliv je například spojitá vůči každé přímce procházející počátkem.

3 Cvičení

Úloha: Ověřte přímo z definice limity, že

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{xy} = 1.$$

Řešení: Naším cílem je k danému $\varepsilon > 0$ nalézt $\delta > 0$ tak, že pro body $\boldsymbol{x} = (x,y)$ s normou $\|\boldsymbol{x}\| < \delta$ platí $|e^{xy} - 1| < \varepsilon$. Rozepišmne si obě nerovnosti detailněji. Ta první dává $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$ a druhá

$$1 - \varepsilon < e^{xy} < 1 + \varepsilon.$$

Můžeme předpokládat, že $0 < \varepsilon < 1$. Logaritmováním nerovnosti $1 - \varepsilon < e^{xy} < 1 + \varepsilon$ dostaneme

$$\ln(1-\varepsilon) < xy < \ln(1+\varepsilon).$$

Dolní mez $\ln(1-\varepsilon)$ je záporná a horní mez $\ln(1+\varepsilon)$ kladná. K danému ε teď musíme volbou δ zaručit, že součin xy leží v intervalu $(\ln(1-\varepsilon), \ln(1+\varepsilon))$. Jak souvisí velikost součinu xy s normou $\sqrt{x^2+y^2}$? Je snadné ověřit, že

$$-\frac{1}{2}(x^2+y^2) < xy < \frac{1}{2}(x^2+y^2),$$

tj.

$$-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}\|^2 < xy < \frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}\|^2.$$

Můžeme tak položit $\delta = \min\{\sqrt{\ln(1+\varepsilon)}, \sqrt{-\ln(1-\varepsilon)}\}$. Tato volba při $\sqrt{x^2+y^2} \leq \delta$ implikuje

$$\ln(1-\varepsilon) = -(-\ln(1-\varepsilon)) \leq -\delta^2 < -\frac{1}{2}(x^2+y^2) \leq xy \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}(x^2+y^2) < \delta^2 \leq \ln(1+\varepsilon).$$

Úloha: Stanovte limitu (existuje-li) funkce

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

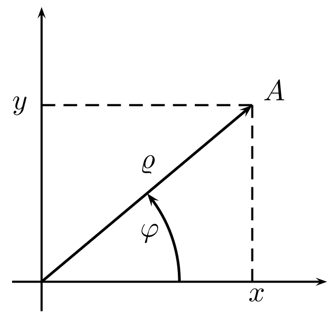
v bodě $(0, 0)$.

Řešení: Bod $(0, 0)$ je hromadným bodem definičního oboru, a proto má tato úloha smysl. Zkoumání zadané limity vede na vyšetřování neurčitého výrazu „$\frac{0}{0}$“, a tedy na srovnání velikostí funkce v čitateli a jmenovateli pro malé hodnoty argumentů. Protože xy je polynom druhého stupně ve dvou proměnných, zatímco $\sqrt{x^2+y^2} \geq |x|$, tušíme, že limita bude nulová. Důvodem pro naši hypotézu je, že čitatel klesá k nule rychleji než jmenovatel. Přesné matematické zdůvodnění je následující:

$$|f(x,y)| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|y||x|}{|x|} = |y|.$$

Fakt, že $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$, implikuje podle Věty 3.4 (vi), že $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Jiný způsob řešení příkladů tohoto typu je založen na použití polárních souřadnic. Polární souřadnice popisují bod (x, y) v rovině pomocí dvojice (ϱ, φ), kde $\varrho \in (0, \infty)$ je vzdálenost od počátku, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ je úhel, který svírá průvodič daného bodu s osou x, viz. obr 3.2.



Obr. 3.2

Platí tedy

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \varphi \\ y &= \varrho \sin \varphi. \end{aligned}$$

Transformací funkce do polárních souřadnic máme

$$f(x,y) = \frac{\varrho \cos \varphi \varrho \sin \varphi}{\varrho} = \varrho \cos \varphi \sin \varphi.$$

Nyní

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\varrho\to 0+} \varrho \cos \varphi \sin \varphi.$$

Protože $|\cos \varphi \sin \varphi| \leq 1$ nezávisle na úhlu φ a $\varrho \to 0$, máme opět podle Věty 3.4 (vi), že

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Úloha: Nalezněte limitu (existuje-li)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{-\frac{x}{x^2+y^2}}.$$

Řešení: Využijeme polárních souřadnic. Funkce má v těchto souřadnicích tvar

$$e^{-\frac{\varrho\cos\varphi}{\varrho^2\cos^2\varphi+\varrho^2\sin^2\varphi}} = e^{-\frac{\cos\varphi}{\varrho^2}}.$$

Vidíme, že tento výraz závisí na úhlu φ: Je-li např. $\varphi = 0$, je $\lim\limits_{\varrho\to 0_+} e^{-\frac{1}{\varrho^2}} = 0$. Pro $\varphi = \pi/2$ ale dostáváme $\lim\limits_{\varrho\to 0_+} e^{-\frac{0}{\varrho^2}} = 1$. Závěr je, že zadaná funkce nemá v bodě $(0,0)$ limitu.

Úloha: Stanovte limitu (existuje-li) funkce

$$f(x,y,z) = \frac{2-\sqrt{4-xyz}}{xyz}$$

v bodě $(0,0,0)$.

Řešení: Úlohu je možno jednoduchou substitucí $t = xyz$ převést na případ zkoumání jednorozměrné limity funkce $\frac{2-\sqrt{4-t}}{t}$ pro $t \to 0$. Pomocí l'Hospitalova pravidla vypočteme:

$$\lim_{t\to 0} \frac{2-\sqrt{4-t}}{t} = \frac{1}{4}.$$

Úloha: Vypočtěte

$$\lim_{(x_1,x_2,x_3,x_4)\to(0,0,0,0)} \frac{2x_1^3x_2^2 - 3x_2^3x_3^2 + 5x_3^3x_4^2}{x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4}.$$

Řešení: Abychom získali jistou představu o vyšetřované funkci, pokusíme se nejdříve porozumět jejímu chování na ose x_1, tj. na množině $\{(x_1,0,0,0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$. Zde platí $f(x_1,0,0,0) = 0$. Uvažovaná limita tedy buďto neexistuje nebo je nulová. Pro druhou možnost svědčí intuitivně fakt, že čitatel zkoumaného zlomku je polynom pátého stupně ve čtyřech proměnných, zatímco jmenovatel je takovýmto polynomem stupně pouze čtyři. Zlomek si rozepíšeme na tři části:

$$\frac{2x_1^3x_2^2 - 3x_2^3x_3^2 + 5x_3^3x_4^2}{x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4} =$$
$$= \frac{2x_1^3x_2^2}{x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4} - \frac{3x_2^3x_3^2}{x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4} + \frac{5x_3^3x_4^2}{x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4}.$$

Pomocí známé nerovnosti $|xy| \le \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ použité pro $x = x_1^2$ a $y = x_2^2$ můžeme první sčítanec odhadnout

$$\left|\frac{2x_1^3x_2^2}{x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4}\right| = \frac{|2x_1x_1^2x_2^2|}{x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4}$$
$$\leq 2|x_1|\frac{\frac{1}{2}(x_1^4+x_2^4)}{x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4} = |x_1|\frac{x_1^4+x_2^4}{x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4} \leq |x_1|.$$

Provedením analogických odhadů pro ostatní členy nakonec dostaneme

$$|f(x_1,x_2,x_3,x_3,x_4)| \leq |x_1| + \frac{3}{2}|x_2| + \frac{5}{2}|x_3|.$$

Protože

$$\lim_{(x_1,x_2,x_3,x_4)\to(0,0,0,0)} |x_1| + \frac{3}{2}|x_2| + \frac{5}{2}|x_3| = 0,$$

máme podle Věty 3.4 (vi)

$$\lim_{(x_1,x_2,x_3,x_4)\to(0,0,0,0)} \frac{2x_1^3x_2^2 - 3x_2^3x_3^2 + 5x_3^3x_4^2}{x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4} = 0.$$

Úloha: Rozhodněte zda je možno nalézt hodnotu $c \in \mathbb{R}$ tak, aby funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+y)^2}{x-y} & x \neq y \\ c & x = y = 0. \end{cases}$$

byla spojitá v bodě $(0,0)$.

Řešení: Funkce f je spojitá v bodě $(0,0)$, je-li její limita v tomto bodě rovna c. Otázka tak vede na zkoumání limity funkce v bodě $(0,0)$. Pokusíme se zjistit, co se děje s hodnotami funkce f, blížíme-li se k hranici jejího definičního oboru, tj. k přímce o rovnici $y = x$. V tomto případě může být výraz $x - y$ libovolně malý a to i při konstantní hodnotě členu $x + y$ v čitateli. Celkově může být hodnota funkce blízko hranice definičního oboru libovolně velká. Formálněji, volme body (x_n, y_n) na přímce o rovnici $x + y = K$, $K > 0$, takové, že jejich složky x_n a y_n navíc splňují

$$x_n - y_n = \frac{1}{n}.$$

Body (x_n, y_n) tak vyhovují těmto dvěma rovnicím

$$x_n + y_n = K \quad \text{a} \quad x_n - y_n = \frac{1}{n} \qquad \text{tj.} \quad x_n = \frac{1}{2}\big(K + \frac{1}{n}\big) \quad \text{a} \quad y_n = \frac{1}{2}\big(K - \frac{1}{n}\big).$$

Dosazením do f lze vypočítat, že

$$f(x_n, y_n) = nK^2.$$

Funkce f je proto neomezená na sebemenším okolí počátku. To vylučuje existenci vlastní limity v tomto bodě. Žádnou volbou hodnoty c tedy nelze dosáhnout spojitosti funkce f v bodě $(0,0)$.

Skutečnost, že funkce f nemá limitu v bodě $(0,0)$ je možno ilustrovat také pozorováním, že f má v bodě $(0,0)$ rozdílné limity vůči ose x a vůči parabole $y = x + x^2$. Snadný výpočet přenecháváme čtenáři.

Úloha: Ukažte, že funkce $f(\boldsymbol{x}) = \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, M)$ (viz cvičení 16, Kap.1) je spojitá.

Řešení: Mějme $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ a zvolme si libovolné okolí $U_\varepsilon(f(\boldsymbol{x}))$ bodu $f(\boldsymbol{x})$. Chceme nalézt okolí $V_\delta(\boldsymbol{x})$ takové, že pro všechna $\boldsymbol{y} \in V_\delta(\boldsymbol{x})$ platí $f(\boldsymbol{y}) \in U_\varepsilon(f(\boldsymbol{x}))$, tj.

$$|f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x})| < \varepsilon.$$

Hledané okolí bude mít velikost $\delta = \varepsilon/2$. Ověříme, že takto zvolené okolí vyhovuje požadavku. Nechť $\boldsymbol{y} \in V_\delta(\boldsymbol{x})$, tj.

$$\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Z definice funkce f nalezneme body $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ z množiny M takové, že

$$f(\boldsymbol{x}) + \frac{\varepsilon}{2} \geq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}\|, \qquad f(\boldsymbol{y}) + \frac{\varepsilon}{2} \geq \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{v}\|.$$

Nyní počítejme

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{y}) &\leq \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}\| \leq \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + f(\boldsymbol{x}) + \frac{\varepsilon}{2} = f(\boldsymbol{x}) + \varepsilon. \end{aligned}$$

To znamená, že $f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) < \varepsilon$. Podobně provedeme výpočet pro $f(\boldsymbol{x})$:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &\leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y} - \boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{v}\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + f(\boldsymbol{y}) + \frac{\varepsilon}{2} = f(\boldsymbol{y}) + \varepsilon. \end{aligned}$$

A tedy $f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}) < \varepsilon$. Spojením obou nerovností máme

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| < \varepsilon,$$

což jsme chtěli dokázat.

Úloha: Determinant $\det \mathbf{A}$ přiřadí každé čtvercové matici $\mathbf{A}$ řádu n číslo $\det \mathbf{A}$. Jestliže reprezentujeme matici $\mathbf{A}$ jako vektorem sestavený z jejích prvků, můžeme funkci „det“ chápat jako funkci definovanou na $\mathbb{R}^{n^2}$. Ukažte, že tato funkce je spojitá. Pomocí spojitosti odvoďte, že množina všech regulárních matic je otevřená množina v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^{n^2}$.

Řešení: Připomeňme, že determinant je možno vyjádřit ve tvaru

$$\det \mathbf{A} = \sum_{P \in \Pi_n} (-1)^{\operatorname{sgn} P} a_{1P(1)} a_{2P(2)} \cdots a_{nP(n)},$$

kde Π_n je množina všech permutací n-prvkové množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Funkce $\det \mathbf{A}$ proměnných $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$ vznikne konečným součtem a každý sčítanec je konečný součin proměnných. Podle Věty 3.7 je tato funkce spojitá.

Regulární matice jsou matice s nenulovým determinantem. Množina M všech regulárních matic je $M = \{\mathbf{A} \mid \det \mathbf{A} \neq 0\}$. Zvolme libovolnou regulární matici $\mathbf{A}_0$. Spojitost funkce determinantu zaručí, že existuje takové okolí $U(\mathbf{A_0})$ matice $\mathbf{A}_0$ v $\mathbb{R}^{n^2}$, na kterém je determinant stále nenulový. Takže $U(\mathbf{A_0}) \subset M$. Našli jsme ke každému prvku $\mathbf{A_0}$ jeho okolí, které je celé obsažené v M. M je proto otevřená množina.

1. Ověřte na základě definice limity, že

$$\lim_{(x,y)\to(4,1)} x^2 + 3y^2 = 19.$$

Vypočtěte následující limity (existují-li)

2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}$;
3. $\lim_{(x,y,z)\to(0,1,0)} \frac{\sin(xy^2z^2)}{xyz}$;
4. $\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{y}$;
5. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$;
6. $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{1+xy}{1-xy}$;
7. $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}-1}{x^2+(y-1)^2}$;
8. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2+xy^2}{x^2+y^2}$;
9. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^4+y^4} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$;
10. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$;
11. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2y^2}$;
12. $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$;
13. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1 + xy)^{\frac{1}{x+y}}$;
14. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{|x|+|y|}$;

15. $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+xy)^{\frac{1}{|x|+|y|}}$;

16. $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{yx^2+z^3}{x^2+y^2+z^2}$;

17. $\lim_{(x_1,x_2,x_3,x_4)\to(0,0,0,0)} \frac{2x_1x_2x_3x_4}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}}$;

18. $\lim_{(x_1,x_2,x_3,x_4)\to(0,0,0,0)} \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{x_1-x_2+x_3-x_4}$;

19. Funkce f má v bodě $\boldsymbol{x}_0$ limitu. Čemu je roven průnik $\bigcap_P \overline{f(P)}$ braný přes všechna prstencová okolí P bodu $\boldsymbol{x}_0$?

20. Nalezněte $c \in \mathbb{R}$ tak, aby funkce
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x|+|y|} & (x,y) \neq (0,0) \\ c & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
byla spojitá.

21. Nalezněte funkci $g(x)$ tak, aby funkce
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x-y} & x \neq y \\ g(x) & x = y, \end{cases}$$
byla spojitá v $\mathbb{R}^2$.

22. Rozhodněte zda funkce
$$f(x,y,z) = \frac{yz - x^2}{x^2+y^2+z^2}$$
může být spojitě rozšířena na $\mathbb{R}^3$.

24. Funkce $f(x,y)$ je pro každé pevné x spojitá v proměnné y a pro každé pevné y spojitá v proměnné x. a) Ukažte, že f nemusí být spojitá. b) (Obtížnější) Předpokládejme navíc, že f je monotonní v proměnné x. Ukažte, že pak je f spojitá.

Výsledky

2. 0; 3. 0; 4. 4; 5. 0; 6. -3; 7. $\frac{1}{2}$; 8. 1; 9. 0; 10 neexistuje; 11 1; 12 $\ln 2$; 13 neexistuje; 14. 0; 15 1; 16 0; 17 0; 18 neexistuje; 19 $\{\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x})\}$; 20. $c = 0$; 21. $g(x) = 2x$; 22. nelze – neexistence limity v bodě $(0,0,0)$; 24. a) viz např. funkci z Příkladu 3.3(ii).