Kapitola 4

Základní vlastnosti spojitých funkcí

V této kapitole se budeme věnovat hlubším vlastnostem spojitých funkcí v euklidovských prostorech, které budeme využívat v dalším výkladu jak v teoretické, tak i v početní poloze. Soustředíme se jednak na spojité funkce definované na uzavřených a omezených množinách a po té na vztah mezi spojitostí funkce a souvislostí jejího definičního oboru. Při odvozování uvidíme, jak úzce souvisí vlastnosti spojitých funkcí se strukturou euklidovských prostorů, kterou jsme se zabývali v Kapitole 1.

1 Spojité funkce na omezených a uzavřených množinách

První princip, který si uvedeme, je princip existence maxima a minima spojité funkce na omezené a uzavřené množině. Tato věta garantuje, že úloha nalézt extrémy spojité funkce více proměnných má řešení. S jejími početními aplikacemi se setkáme v kapitole o extrémech funkcí.

Věta 4.1. *Nechť f je spojitá funkce na uzavřené a omezené množině M v euklidovském prostoru X. Pak existují body $\boldsymbol{x}_{\max}, \boldsymbol{x}_{\min} \in M$ tak, že*

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}_{\max}) &= \max_{\boldsymbol{x}\in M} f(\boldsymbol{x}) \\ f(\boldsymbol{x}_{\min}) &= \min_{\boldsymbol{x}\in M} f(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

Důkaz. Budeme dokazovat existenci bodu $\boldsymbol{x}_{\max}$, případ minima odtud již snadno vyvodíme. V první fázi ukážeme, že funkce f musí být omezená shora. Tato skutečnost se nejlépe demonstruje důkazem sporem. Předpokládejme, že f může nabýt libovolně velké hodnoty. Pak pro každé přirozené číslo n můžeme nalézt bod $\boldsymbol{x}_n \in M$ tak, že

$$f(\boldsymbol{x}_n) \geq n.$$

Množina $A = \{\boldsymbol{x}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ skládající se ze všech takovýchto bodů je nekonečná. Z Věty 1.9 vyplývá existence hromadného bodu $\boldsymbol{x}_h$ množiny A. Díky uzavřenosti množiny M musí být $\boldsymbol{x}_h \in M$. K absurdnímu závěru však dojdeme, budeme-li zkoumat, jakou hodnotu by vlastně funkce f měla mít v bodě $\boldsymbol{x}_h$. Na jedné straně díky spojitosti máme

$$f(\boldsymbol{x}_h) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_h \\ \boldsymbol{x}\in A}} f(\boldsymbol{x}).$$

Výběr bodů x_n byl ovšem takový, že pro každé n je nejen $f(\boldsymbol{x}_n) \geq n$, ale i $f(\boldsymbol{x}_m) \geq n$ pro všechna $m \geq n$. Odtud nám vyplývá, že

$$f(\boldsymbol{x}_h) \geq n \text{ pro všechna } n.$$

Hodnota $f(\boldsymbol{x}_h)$ by tak měla být větší než jakékoliv přirozené číslo, což je spor.

Skutečnost, že f je shora omezená znamená, že supremum jejích hodnot na množině M je konečné. Označme si ho

$$s = \sup\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in M\}.$$

Připomeňme, že supremum je charakterizováno následujícími vlastnostmi

(i) $f(\boldsymbol{x}) \leq s$ pro každé $\boldsymbol{x} \in M$,

(ii) pro každé přirozené číslo m existuje $\boldsymbol{x}_m \in M$ tak, že $s - \dfrac{1}{m} \leq f(\boldsymbol{x}_m) \leq s$.

Užijeme vlastnost (ii) a pro každé m vybereme příslušný bod $\boldsymbol{x}_m$. Množinu všech takto vybraných bodů označíme $B = \{\boldsymbol{x}_m \in M \mid m \in \mathbb{N}\}$. Je-li B konečná, pak jeden z jejích bodů musí být bodem maxima a důkaz je hotov. Je-li B nekonečná, má opět podle Věty 1.9 hromadný bod $\boldsymbol{x}_h \in M$. Spojitost funkce f a vlastnost (ii) teď dává

$$f(\boldsymbol{x}_h) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_h \\ \boldsymbol{x}\in B}} f(\boldsymbol{x}) = s.$$

Tím jsme ukázali, že s je ve skutečnosti maximum, neboť se ho v jistém bodě množiny M nabývá.

Pro existenci minima použijeme následující úvahu: Zatím máme dokázáno, že *každá* spojitá funkce na M nabývá svého maxima. Specielně i funkce $(-f)$ nabývá svého maxima v jistém bodě $\boldsymbol{x}_0$. Nyní si stačí uvědomit, že

$$\min(f) = -\max(-f)$$

a vidíme, že v $\boldsymbol{x}_0$ nabývá původní funkce f svého minima. □

Důsledkem Věty 4.1 je čtenáři již známý fakt, že každá spojitá funkce jedné proměnné má na omezeném uzavřeném intervalu maximum i minimum. Dalším, tentokráte novým důsledkem je, že spojitá funkce zobrazí uzavřenou omezenou množinu vždycky na uzavřenou omezenou množinu.

Důsledek 4.2. *Nechť $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce definovaná na uzavřené a omezené podmnožině $M \subset \mathbb{R}^n$ euklidovského prostoru. Pak obor hodnot $f(M)$ je omezená a uzavřená množina.*

Důkaz. Podle Věty 4.1 nabývá f minima a maxima. Obor hodnot je tedy omezená množina v $\mathbb{R}$. Zbývá ukázat, že $f(M)$ je uzavřena množina. Předpokládejme opak, tj. že $f(M)$ není uzavřená. Pak musí existovat hraniční bod y množiny $f(M)$, který do této množiny nenáleží. Bod y je ale hromadným bodem množiny $f(M)$, což znamená, že pro každé n přirozené můžeme nalézt $\boldsymbol{x}_n \in M$ tak, že

$$|f(\boldsymbol{x}_n) - y| \leq \frac{1}{n}. \tag{4.1}$$

Množina $A = \{\boldsymbol{x}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ musí být nekonečná. Podle Věty 1.9 má hromadný bod $\boldsymbol{x}_h \in M$. Jaká bude za těchto předpokladů hodnota $f(\boldsymbol{x}_h)$? Na základě spojitosti máme

$$f(\boldsymbol{x}_h) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_h \\ \boldsymbol{x}\in A}} f(\boldsymbol{x}).$$

Přidáme-li k tomu nerovnost (4.1), vidíme, že body $f(\boldsymbol{x}_n)$ se také blíží k $\boldsymbol{y}$. To znamená, že nutně $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}_h)$. Dospěli jsme takto k závěru $\boldsymbol{y} \in f(M)$, což je ve sporu s předpokladem. Množina $f(M)$ obsahuje všechny své hraniční body, a je proto uzavřená. □

Spojitá zobrazení tedy převádějí uzavřené omezené množiny na množiny stejného typu. Poslední vlastnost spojitých funkcí na omezených a uzavřených množinách, o které se zmíníme, je stejnoměrná spojitost. Tato vlastnost bude klíčová pro teorii vícerozměrné integrace a čtenář se s aplikacemi tohoto pojmu setká v [1].

Definice 4.3. *Nechť f je funkce definovaná na jisté podmnožině M euklidovského prostoru. Řekneme, že f je* **stejnoměrně spojitá**, *jestliže platí následující tvrzení: pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že*

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| < \varepsilon, \ \textit{kdykoliv}\ \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \leq \delta, \ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M.$$

Funkce je tedy stejnoměrně spojitá, jestliže pro danou odchylku funkčních hodnot $\varepsilon > 0$ umíme najít takovou vzdálenost $\delta > 0$, že rozdíl funkčních hodnot nepřekročí stanovenou odchylku, pokud budou body od sebe vzdáleny maximálně δ. *Nezáleží přitom vůbec na umístění těchto bodů, ale pouze na jejich vzdálenosti.* Proto uvedený typ spojitosti nazýváme spojitostí stejnoměrnou. Každá stejnoměrně spojitá funkce je spojitá. Opačné tvrzení však vždy neplatí. Vezměme si například spojitou funkci v jedné proměnné

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (0,1).$$

Pro zadané ε není možno nalézt $\delta > 0$ tak, aby podmínka $|x - y| < \delta$ zaručovala, že

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| < \varepsilon \text{ pro všechna } x, y \in (0,1).$$

Důvod je v tom, že blízko nuly je možno nalézt body x, y s libovolně malou vzdáleností, a přitom s libovolně velkým rozdílem funkčních hodnot. Skutečně, pro přirozená čísla n, m položíme $x = \frac{1}{n}$, $y = \frac{1}{m+n}$. Pak

$$|x - y| < \frac{1}{n}, \qquad \text{zatímco} \qquad |f(x) - f(y)| = m.$$

Ukazuje se však, že pokud se omezíme na uzavřené a omezené množiny, je každá spojitá funkce automaticky stejnoměrně spojitá.

Věta 4.4. *Každá funkce spojitá na uzavřené omezené množině v euklidovském prostoru je stejnoměrně spojitá.*

Důkaz. Argumenty důkazu se opět opírají o stěžejní vlastnost omezených uzavřených množin z Věty 1.9: obsahují s každou nekonečnou podmnožinou i její hromadný bod.

Předpokládejme, že f je spojitá funkce definovaná na omezené uzavřené množině M v euklidovském prostoru, která není stejnoměrně spojitá. Negací podmínky v Definici 4.3 dostaneme: Existuje $\varepsilon_0 > 0$ tak, že pro každé přirozené číslo n lze nalézt dvojici bodů $\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_n \in M$ se vzdáleností

$$\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_n\| \leq \frac{1}{n} \tag{4.2}$$

(tedy libovolně malou) a rozdílem funkčních hodnot

$$|f(\boldsymbol{x}_n) - f(\boldsymbol{y}_n)| \geq \varepsilon_0. \tag{4.3}$$

Vezměme hromadný bod $\boldsymbol{x}_h \in M$ množiny $A = \{\boldsymbol{x}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Znamená to, že existuje vybraná posloupnost bodů z A, která konverguje k $\boldsymbol{x}_h$. Označme si tuto vybranou posloupnost $\boldsymbol{x}_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$. V důsledku nerovnosti (4.2) vidíme, že posloupnost $\boldsymbol{y}_{n_k}$ rovněž konverguje k $\boldsymbol{x}_h$. Na základě spojitosti funkce f pak dostáváme

$$\lim_{k\to\infty} f(\boldsymbol{x}_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(\boldsymbol{y}_{n_k}) = f(\boldsymbol{x}_h).$$

Provedeme ještě limitní přechod $k \to \infty$ v nerovnosti (4.3):

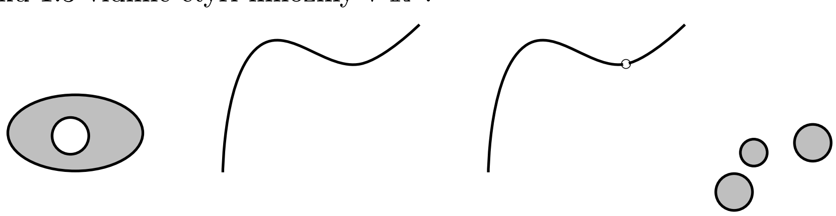
$$0 < \varepsilon_0 \leq \lim_{k\to\infty} |f(\boldsymbol{x}_{n_k}) - f(\boldsymbol{y}_{n_k})| = |\lim_{k\to\infty} f(\boldsymbol{x}_{n_k}) - \lim_{k\to\infty} f(\boldsymbol{y}_{n_k})| = |f(\boldsymbol{x}_h) - f(\boldsymbol{x}_h)| = 0,$$

což je spor. □

2 Spojité funkce na souvislých množinách

Původní představou spojité funkce byla funkce, jejíž graf je možno nakreslit nepřetržitým tahem. Třebaže tato zjednodušující představa později ustoupila, ukazuje na důležitý vztah mezi spojitostí funkce a souvislostí množin. Velice dobře je například známa věta, že každá spojitá funkce jedné proměnné nabývá všech hodnot ležících mezi jakýmikoli jejími dvěma hodnotami. Jinak řečeno, obraz intervalu je vždy interval. Cílem této části je ukázat zobecnění tohoto principu pro spojité funkce na euklidovském prostoru.

Na obrázku 1.3 vidíme čtyři množiny v $\mathbb{R}^2$.



(a) (b) (c) (d)

Obr. 1.3

Množiny na obrázcích (a), (b) považujeme za souvislé, zatímco množiny na obrázcích (c), (d) z názoru k souvislým neřadíme. Jaký je mezi těmito případy rozdíl? Poslední dvě množiny se rozpadají na části, které je navíc možno od sebe oddělit disjunktními otevřenými množinami. Takovýto rozklad se v případě prvních dvou nepodaří nalézt. Tím jsme vedeni k následující definici.

Definice 4.5. *Množina M v euklidovském prostoru X se nazývá* **souvislá**, *jestliže není možno nalézt disjunktní otevřené množiny O_1, O_2 v X takové, že*

(i) $M \subset O_1 \cup O_2$,

(ii) $O_1 \cap M$ *a* $O_2 \cap M$ *jsou neprázdné množiny.*

Otevřená souvislá množina se nazývá **oblast**.

Názornost této definice bude zřetelnější, podíváme-li se, jaká množina je *nesouvislá*: Takovou množinu můžeme pomocí O_1 a O_2 disjunktně rozložit $M = (M \cap O_1) \cup (M \cap O_2)$. Nezdaří-li se to, pak teprve prohlásíme množinu za souvislou. Triviální příklady souvislých množin jsou $\emptyset$ a jednobodová množina. V případě otevřených množin se definice souvislosti velmi zjednoduší, jak uvidíme později. Dříve než se budeme zabývat souvislými množinami ve vyšších rozměrech, podíváme se na případ reálné osy. Zde je situace přehledná:

Věta 4.6. *Souvislé množiny v $\mathbb{R}$ jsou právě intervaly, jednobodové množiny a množina prázdná.*

Důkaz. Věta tvrdí v zásadě dvě věci. Za prvé, každý interval je množina souvislá. Za druhé, každá souvislá množina v $\mathbb{R}$, kromě nezajímavého případu množiny jednobodové a prázdné, je interval.

Nejdříve dokážeme první tvrzení. Uvažujme interval $I \subset \mathbb{R}$. Připusťme, že I není souvislý, tj. existují otevřené množiny O_1 a O_2 mající vlastnosti (i) a (ii) z Definice 4.5. Zcela jistě tedy můžeme vybrat elementy $x \in I \cap O_1$ a $y \in I \cap O_2$ a předpokládat, že $x < y$. Protože O_1 je otevřená množina, musí existovat $t > x$ tak, že $\langle x, t \rangle \subset I \cap O_1$. Podívejme se nyní na horní mez pro takováto t, tj. položme

$$s = \sup\{t \mid \langle x, t \rangle \subset O_1 \cap I\}.$$

Toto supremum je jistě konečné, neboť např. musí být $s < y$. Samotné supremum s ovšem do množiny O_1 již patřit nemůže – kdyby ano, pak by díky otevřenosti O_1 existovalo číslo $s' > s$ takové, že $\langle x, s' \rangle \subset O_1 \cap I$. To je ale ve sporu s volbou s. Protože $s \in I$ a $O_1 \cup O_2$ pokrývá I, zbývá jen, že $s \in O_2$. To ovšem vzhledem k otevřenosti množiny O_2 znamená, že existuje takové $u < s$ pro které je $\langle u, s \rangle \subset O_2$. Specielně vidíme, že $u \in O_2$. Pak ovšem u není v O_1, a proto $s \leq u$. Což je spor. Každý interval je tedy souvislá množina.

Předpokládejme v dalším, že M je souvislá množina v $\mathbb{R}$, která obsahuje alespoň dva body. Ukážeme, že M je interval. K tomu postačí ověřit, že s každými dvěma body $x, y \in M$ obsahuje M všechny body ležící mezi nimi, tj. interval $\langle x, y \rangle$. Předpokládejme opak a odvodíme spor. Nechť mezi body x a y existuje c, $x < c < y$, které není v množině M. Položíme-li $O_1 = (-\infty, c), O_2 = (c, \infty)$, získáme dvě otevřené disjunktní množiny. Vzhledem k tomu, že $x \in O_1 \cap M$, $y \in O_2 \cap M$, jsou obě množiny $O_1 \cap M$, $O_2 \cap M$ neprázdné. A protože $M \subset O_1 \cup O_2$, splňují množiny O_1 a O_2 požadavky (i), (ii) Definice 4.5. Množina M tedy nemůže být souvislá, a to je hledaný spor. Důkaz je ukončen. $\square$

Pokusíme se nyní charakterizovat oblasti (tj. souvislé otevřené množiny) v obecném euklidovském prostoru. Věta 4.6 říká, že jediné netriviální oblasti v $\mathbb{R}$ jsou otevřené intervaly. To jsou množiny, které s každými dvěma body obsahují i celou spojující úsečku. Analogická charakterizace je možná i pro vyšší dimenze, nahradíme-li úsečky lomenými čarami. Připomeňme si, že úsečka spojující dva body $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ v euklidovském prostoru je definována jako množina $\{t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y} \mid t \in \langle 0, 1\rangle\}$. Zcela stejně jako ve Větě 1.3 probíhá důkaz, že úsečka je souvislá množina. Nebudeme ho zde proto znovu vypisovat. Názvem lomená čára označujeme sjednocení na sebe navazujících úseček.

Věta 4.7.

(i) *Lze-li každé dva body množiny G spojit lomenou čarou $L \subset G$, je množina G souvislá.*

(ii) *Je-li G souvislá a navíc otevřená (tj. oblast), pak lze každé dva body z G spojit lomenou čarou $L \subset G$.*

Poznámka 4.8. Bod (i) nám dává pohodlné kriterium pro testování souvislosti. Bod (ii) pak říká, že v případě otevřené množiny, je toto kriterium přímo ekvivalentní souvislosti množiny.

Důkaz. (i) Předpokládejme, že G je množina, jejíž každé dva body lze spojit lomenou čarou L ležící v G. Cílem je dokázat, že G je souvislá. Postupujme sporem. Kdyby nebyla souvislá, pak existují otevřené disjunktní množiny O_1 a O_2 takové, že

$$G = O_1 \cup O_2, \; G \cap O_1 \neq \emptyset \text{ a } G \cap O_2 \neq \emptyset.$$

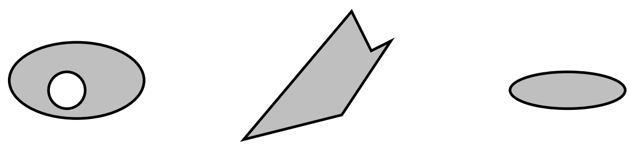
Zvolme $\boldsymbol{x} \in G \cap O_1$ a $\boldsymbol{y} \in G \cap O_2$. Víme, že lze najít lomenou čáru L spojující $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$. Čára L je sjednocením konečně mnoha na sebe navazujících úseček. Alespoň jedna z nich, označme ji T, nepatří celá ani do O_1, ani do O_2. Pak ovšem $O_1 \cap T$, $O_2 \cap T$ je rozklad úsečky na množiny vyhovující podmínkám (i), (ii) v Definici 4.5. To je spor, neboť to by znamenalo, že úsečka není souvislá. Tím je důkaz je proveden.

(ii) Nechť G je oblast v euklidovském prostoru. Ukažme, že každé dva body z G je možno spojit lomenou čarou, která je podmnožinou G. Zvolme proto libovolný bod $\boldsymbol{x} \in G$ a definujme si pomocnou množinu $G_{\boldsymbol{x}}$ bodů dosažitelných z $\boldsymbol{x}$ pomocí lomené čáry

$$G_{\boldsymbol{x}} = \{\boldsymbol{y} \in G \mid \boldsymbol{y} \text{ lze spojit s } \boldsymbol{x} \text{ lomenou čarou } L \subset G\}.$$

Přímo z definice množiny $G_{\boldsymbol{x}}$ vyplývá, že $G_{\boldsymbol{x}} \subset G$. Podaří-li se odvodit, že $G_{\boldsymbol{x}} = G$, bude důkaz hotov. Nechť $\boldsymbol{y} \in G_{\boldsymbol{x}}$. Pak je možno nalézt okolí $U(\boldsymbol{y})$ ležící v G. Každý bod z tohoto okolí snadno spojíme úsečkou s jeho středem. Tímto se na každý bod z okolí $U(\boldsymbol{y})$ také dostaneme z bodu $\boldsymbol{x}$ po lomené čáře ležící v G. Proto $U(\boldsymbol{y}) \subset G_{\boldsymbol{x}}$, a to znamená, že $G_{\boldsymbol{x}}$ je otevřená množina. Kdyby zbylá část $G \setminus G_{\boldsymbol{x}}$ byla neprázdná, tak stejnou úvahou jako výše zjistíme, že musí být otevřená: je-li bod $\boldsymbol{y} \in G \setminus G_{\boldsymbol{x}}$, tj. „nespojitelný“ s bodem $\boldsymbol{x}$ lomenou čarou, musí být nespojitelné i všechny body v jeho okolí. Takže kolem $\boldsymbol{y}$ existuje okolí $U(\boldsymbol{y}) \subset G \setminus G_{\boldsymbol{x}}$, takže $G \setminus G_{\boldsymbol{x}}$ je rovněž otevřená. Pak $G = G_{\boldsymbol{x}} \cup (G \setminus G_{\boldsymbol{x}})$ je disjunktním sjednocením neprázdných otevřených množin, což je ve sporu se souvislostí G. Ukázali jsme tím, že $G \setminus G_{\boldsymbol{x}} = \emptyset$, tj. $G = G_{\boldsymbol{x}}$. □

Věta 4.7 říká, že otevřená množina je souvislá právě tehdy když se z každého výchozího bodu v dané množině dostaneme po úsečkách do libovolného jiného místa aniž množinu opustíme. Přísnější požadavek by byl, aby každé dva body dané množiny bylo možno spojit pouze jedinou úsečkou, která je v množině obsažena. Takovéto množiny se nazývají *konvexní.* Proto každá konvexní množina je souvislá. Zdaleka ne všechny souvislé množiny jsou konvexní. Na obr. 1.4 (a), (b) vidíme souvislé a přitom nekonvexní množiny. Obrázek 1.4 (c) znázorňuje konvexní množinu.



(a) (b) (c)

Obr. 1.4

Jak už jsme naznačili na začátku této části, dokážeme zobecnění věty pro funkce jedné proměnné o tom, že spojitý obraz intervalu je interval. Věta 4.6 říká, že interval je souvislá množina. Nabízí se nám tak následující přeformulace: spojitá funkce jedné proměnné zobrazuje souvislou množinu na souvislou množinu. Takové znění je vhodné pro zobecnění do více proměnných, neboť neobsahuje pojem interval. Skutečně platí

Věta 4.9. *Každá spojitá funkce na euklidovském prostoru zobrazí souvislou množinu na souvislou množinu.*

Důkaz. Nechť M je souvislá množina v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$ a $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Naším úkolem je ukázat, že obraz $f(M)$ množiny M je souvislá množina. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že $f(M)$ není souvislá. Pak existují otevřené disjunktní množiny $O_1, O_2 \subset \mathbb{R}$ oddělující části množiny $f(M)$, tj. mají vlastnosti

(i) $f(M) \subset O_1 \cup O_2$;

(ii) $f(M) \cap O_1 \neq \emptyset$, $f(M) \cap O_2 \neq \emptyset$.

Uvažujme nyní množiny $A = f^{-1}(O_1) \cap M$, $B = f^{-1}(O_2) \cap M$. To jsou dvě disjunktní množiny, které díky (i) tvoří rozklad množiny M: $M = A \cup B$. Tento rozklad je netriviální, neboť požadavek (ii) zaručuje, že $A \cap M$ i $B \cap M$ jsou neprázdné. Množiny A a B však nejsou obecně otevřené v $\mathbb{R}^n$. Upravíme je proto na množiny A_1 a B_1 takové, aby splňovaly následující požadavky

(a) A_1 a B_1 jsou otevřené;

(b) $A_1 \cap B_1 = \emptyset$;

(c) $A \subset A_1$ a $B \subset B_1$. Podaří-li se nám takové A_1 a B_1 vytvořit, bude důkaz hotov: Tyto nové množiny pokrývají M díky (c). Množina M se tak nechá pokrýt dvěma otevřenými disjunktními množinami, což je ve sporu se souvislostí.

Zbývá vytvořit množiny A_1, B_1. Označme si dvě pomocné funkce

$$g_A(\boldsymbol{x}) = \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, A), \quad g_B(\boldsymbol{x}) = \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, B),$$

reprezentující vzdálenost od množiny A a množiny B, (viz. cvičení 16, Kap.1). Položíme

$$A_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_A(\boldsymbol{x}) < g_B(\boldsymbol{x})\}, \quad B_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_B(\boldsymbol{x}) < g_A(\boldsymbol{x})\}.$$

Tyto množiny jsou zcela jistě disjunktní, bod (b) je tak splněn. Funkce g_A a g_B jsou také spojité (viz řešené příklady v Kap.3). Z toho vyplývá, že A_1 i B_1 jsou otevřené; platí tak i bod (a). Zbývá bod (c). Mějme $\boldsymbol{x} \in A$ libovolné. Pak $g_A(\boldsymbol{x}) = 0$. Navíc ale víme, že $f(\boldsymbol{x}) \in O_1$. Protože O_1 je otevřená množina, existuje okolí $U(f(\boldsymbol{x}))$ bodu $f(\boldsymbol{x})$, které je celé obsaženo v O_1. Díky spojitosti f v bodě $\boldsymbol{x}$ existuje okolí $V(\boldsymbol{x})$, že

$$f\big(V(\boldsymbol{x}) \cap M\big) \subset U\big(f(\boldsymbol{x})\big) \subset O_1.$$

To ovšem znamená, že

$$V(\boldsymbol{x}) \cap M \subset f^{-1}(O_1) \cap M = A.$$

Kolem bodu $\boldsymbol{x}$ tak existuje okolí $V(\boldsymbol{x})$, že v rámci množiny M je celé okolí obsaženo v A. Specielně v takovém okolí $V(\boldsymbol{x})$ nemůže být žádný bod množiny B. To znamená, že $\boldsymbol{x}$ má kladnou vzdálenost od B, $g_B(\boldsymbol{x}) > 0$. Ukázali jsme tak, že pro jakýkoli bod $\boldsymbol{x} \in A$ platí

$$g_B(\boldsymbol{x}) > g_A(\boldsymbol{x}) = 0.$$

To znamená, že $A \subset A_1$. Pro množiny B a B_1 je postup úplně stejný, zamění se pouze písmena A a B.

Podle poznámky výše, je celý argument ukončen. □

Poznámka 4.10. V předešlém důkaze si můžeme povšimnout, že jsme nikde nevyužili faktu, že hodnoty $f(\boldsymbol{x})$ jsou reálná čísla. Celý postup, tak jak je napsaný, prochází i v případě, že f je spojité *zobrazení*, $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$, viz (2.1). Spojitost takového zobrazení je definována jako spojitost všech jeho složek. Vlastně jsme dokázali silnější tvrzení:

Věta 4.11. *Každé spojité zobrazení mezi euklidovskými prostory zobrazuje souvislou množinu na souvislou množinu.*

Příklad 4.12. Ukažme, že elipsa o rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

je souvislá množina v $\mathbb{R}^2$.

Z analytické geometrie víme, že danou elipsu je možno popsat parametricky jako množinu $\{(a\cos t, b\sin t) \mid t \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$. Elipsa je tedy obrazem intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ při spojitém zobrazení $f\colon \langle 0, 2\pi\rangle \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(t) = (a\cos t, b\sin t).$$

Věta 4.11 říká, že tato množina je souvislá.

Věta 4.9 má i další důležitý důsledek:

Důsledek 4.13. *Obor hodnot spojité funkce definované na souvislé množině je jednobodová množina nebo interval.*

Důkaz. Věta 4.11 říká, že spojitý obraz souvislé množiny je souvislá množina. Vzhledem k tomu, že v $\mathbb{R}$ jiné neprázdné souvislé množiny než intervaly a jednobodové množiny nejsou (Věta 4.6), je důsledek dokázán. □

Příklad 4.14. Pokusíme se na základě vlastností spojitých funkcí stanovit obor hodnot funkce

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Zadaná funkce je spojitou funkcí definovanou na souvislé množině $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Oborem hodnot je tedy interval. Nerovnost $|xy| \le \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ říká, že

$$-\frac{1}{2} \le f(x,y) \le \frac{1}{2}.$$

Vzhledem k tomu, že $f(1,1) = \frac{1}{2}$, $f(-1,1) = -\frac{1}{2}$, musí být oborem hodnot interval $\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$.

Jak ukazuje následující příklad na první pohled „teoretické“ věty o vlastnostech spojitých funkcí mohou mít aplikace i při řešení zcela početních úloh.

Příklad 4.15. Ukažme, že následující soustava nelineárních rovnic o neznámých x, y má řešení

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} xy - e^{-\frac{x}{2x^2+y^2}} + \frac{y}{2} &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Úlohu můžeme přeformulovat na otázku zda spojitá funkce dvou proměnných

$$f(x,y) = \operatorname{arctg} xy - e^{-\frac{x}{2x^2+y^2}} + \frac{y}{2}$$

nabývá na kružnici se středem v počátku a poloměrem 1 nulovou hodnotu. Jak již víme, kružnice je souvislá množina, a proto ji f zobrazí na interval. Podívejme se na hodnoty f v bodech $(1,0)$ a $(0,1)$.

$$\begin{aligned} f(1,0) &= \operatorname{arctg} 0 - e^{-\frac{1}{2}} + 0 = e^{-\frac{1}{2}} > 0 \\ f(0,1) &= \operatorname{arctg} 0 - 1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0. \end{aligned}$$

Funkce f má tedy na kružnici alespoň jeden nulový bod. Složky tohoto bodu jsou řešením studované soustavy.

Hodnoty neznámých se dají stanovit pouze numericky. Můžeme například modifikovat metodu bisekce a neustálým dělením oblouků kružnice na poloviny stejné délky lokalizovat polohu řešení s libovolnou přesností.

3 Cvičení

1. Funkce f definovaná na euklidovském prostoru X se nazývá Lipschitzovská, jestliže existuje $L > 0$ tak, že

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| \leq L\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \text{ pro všechna } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X.$$

   (a) Ukažte, že funkce $f(\boldsymbol{x}) = \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, M)$ je Lipschitzovská s konstantou $L = 1$.

   (b) Ukažte, že každá Lipschitzovská funkce je stejnoměrně spojitá.

   Rozhodněte zda jsou následující množiny souvislé nebo dokonce konvexní.

2. $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\boldsymbol{x} - (1,1)\| \geq 1\}$;
3. $\{(x, y, z) \mid 2x + 3y + z > 1\}$;
4. $\{\boldsymbol{x} \mid 3 \leq \|\boldsymbol{x}\| < 5\}$;
5. $\mathbb{Q}^2$, kde $\mathbb{Q}$ je množina racionálních čísel;
6. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^3 + y^3 \leq 8,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.
7. Ukažte, že uzávěr souvislé množiny je opět souvislá množina.
8. Ukažte, že množina M v euklidovském prostoru je nesouvislá právě tehdy když existuje neprázdná vlastní podmnožina A množiny M taková, že každý bod množiny A má kladnou vzdálenost od doplňku $M \setminus A$ a každý bod doplňku $M \setminus A$ má kladnou vzdálenost od množiny A.

Výsledky

2. souvislá, není konvexn; 3. konvexní; 4. souvislá, není konvexní; 5. není souvislá, je pokryta např. množinami

$$O_1 = \{(x, y) \mid x > \sqrt{2}\},\ O_2 = \{(x, y) \mid x < \sqrt{2}\}.$$

6. souvislá, není konvexní.