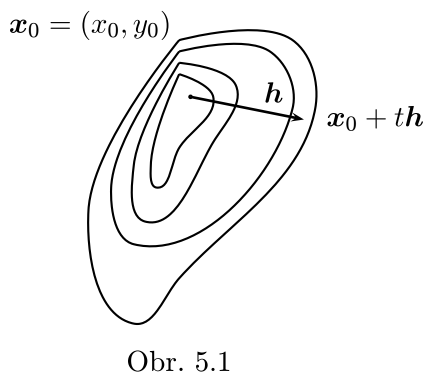
Kapitola 5

Derivace funkcí více proměnných

Derivace je základním pojmem diferenciálního počtu. Při definici derivace pro funkce více proměnných můžeme postupovat dvěma způsoby. První možnost je uvažovat hodnoty dané funkce pouze na jisté přímce. Získáme tak v podstatě funkci jedné proměnné, kterou již derivovat umíme. Tento přístup vede k definici derivace funkce ve směru a bude jí věnována první část kapitoly. Derivace ve směru má názorný význam a je základním početním nástrojem. Její nevýhodou však je, že poskytuje informaci o chování funkce pouze vůči velice speciálním podmnožinám definičního oboru – přímkám. Abychom získali úplnější informaci o hodnotách funkce v okolí daného bodu musíme definovat silnější pojem – diferenciál. Toto pojetí derivace vychází z myšlenky aproximovat přírůstek funkce vhodnou lineární funkcí. Bude mu věnována druhá část této kapitoly. Závěrem se zmíníme o některých geometrických a fyzikálních aspektech derivace funkcí více proměnných.

1 Směrové a parciální derivace

Představme si nejdříve modelovou situaci. Reliéf terénu je dán funkcí $f(x,y)$, která bodu (x,y) v rovině mapy přiřadí nadmořskou výšku $f(x,y)$. Naše výchozí poloha na mapě je bod $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0)$. Začneme se pohybovat v terénu takovým způsobem, že vektor $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^2$ rychlosti v rovině mapy bude stále konstantní. Jinými slovy, v horizontální poloze je náš pohyb rovnoměrný a přímočarý, viz obr. 5.1.



Obr. 5.1

Ptáme se, jaká je vertikální složka naší rychlosti. Tato složka je rychlostí změny nadmořské výšky (rychlost stoupání či klesání) a bude záviset jak povaze terénu (funkce f), tak na horizontální rychlosti (vektor $\boldsymbol{h}$). Rychlost je vždy dána limitou poměru velikosti dráhy a času. Naše počáteční nadmořská výška (čas $t = 0$) je $f(x_0, y_0)$. Za čas t se na mapě dostaneme do bodu $\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h}$ a naše nadmořská výška bude $f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h})$. Poměr dráhy ve vertikálním směru a času je

$$\frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t}.$$

Přejdeme-li k limitě

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t} \tag{5.1}$$

dostaneme okamžitou vertikální rychlost v bodě $\boldsymbol{x}_0$. Limita (5.1), jejíž fyzikální význam jsme si objasnili, se nazývá derivace funkce f v bodě $\boldsymbol{x}_0$ ve směru $\boldsymbol{h}$.

Definice 5.1. *Nechť $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ je funkce definovaná na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^n$ euklidovského prostoru.* **Derivací funkce f v bodě $\boldsymbol{x}_0 \in X$ ve směru $\boldsymbol{h} \in X$** *(krátce* **směrovou derivací***) nazýváme limitu*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t}.$$

K označení této limity budeme používat symbol $\partial_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}_0)$.

Je vidět, že derivace ve směru $\boldsymbol{h} = 0$ je vždy nulová.

Poznámka 5.2. (i) Předpokládejme, že funkce f má směrovou derivaci $\partial_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}_0)$. Pak existuje také derivace f ve směru všech násobků vektoru $\boldsymbol{h}$ a platí přitom

$$\partial_{\tau\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) = \tau \partial_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) \quad \text{pro všechna} \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Tuto vlastnost můžeme lehce ověřit přímo z definice tím, že provedeme substituci $s = t\tau$:

$$\begin{aligned}\partial_{\tau\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + t\tau\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x})}{t} = \lim_{s\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + s\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x})}{s/\tau} = \\ &= \tau \lim_{s\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + s\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x})}{s} = \tau \partial_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}).\end{aligned}$$

Fyzikální význam tohoto zjištění je zřejmý. Budeme-li se v motivační úvaze pohybovat po mapě dvakrát tak rychle, zvětší se i dvakrát naše vertikální rychlost. Vydáme-li se například v opačném směru, změní vertikální rychlost znaménko, apod.

(ii) Výpočet směrové derivace funkce více proměnných lze převést na nám již známý úkol derivovat funkci jedné proměnné. Stačí totiž položit

$$\varphi(t) = f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h}).$$

Pak

$$\varphi'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x})}{t} = \partial_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}_0).$$

Hodnoty pomocné funkce $\varphi(t)$ jsou dány restrikcí funkce f na přímku, která prochází bodem $\boldsymbol{x}_0$ a má směrový vektor $\boldsymbol{h}$. V modelovém příkladu s nadmořskou výškou reprezentuje φ „výškový profil“ a udává naši nadmořskou výšku v čase t.

Příklad 5.3. Nalezněme směrové derivace funkce

$$f(x, y) = e^{x-y^2}$$

v bodě $(0,0)$ ve směru vektorů $(1,0), (-1,0)$ a $(1,1)$.

Nejdříve nalezneme „průřezové funkce“ $\varphi(t)$. Pro $\boldsymbol{h} = (1,0)$ máme

$$\varphi(t) = f((0,0) + t(1,0)) = f(t,0) = e^t,$$

a proto $\partial_{\boldsymbol{h}} f(0,0) = \varphi'(0) = e^0 = 1$.

Bude-li $\boldsymbol{h} = (-1,0)$ víme již podle Poznámky 5.2 (i), že derivace musí změnit znaménko. Pro ilustraci se však stejně podívejme na průřez funkce

$$\varphi(t) = f((0,0) + t(-1,0)) = f(-t,0) = e^{-t}.$$

Skutečně tedy $\partial_{\boldsymbol{h}} f(0,0) = \varphi'(0) = -e^0 = -1$. Konečně pro $\boldsymbol{h} = (1,1)$ máme

$$\varphi(t) = f((0,0) + t(1,1)) = f(t,t) = e^{t-t^2}.$$

Jelikož $\varphi'(t) = (1-2t)e^{t-t^2}$, je $\partial_{\boldsymbol{h}} f(0,0) = \varphi'(0) = 1$.

(ii) Nalezněme směrovou derivaci funkce

$$f(x, y, z) = \sin(xyz)$$

v bodě $(1,0,0)$ ve směru vektoru $\boldsymbol{h} = (2,1,1)$.

Podobně jako výše označíme

$$\varphi(t) = f\big((1,0,0) + t(2,1,1)\big) = f(1+2t, 1+t, 0+t) = \sin(t + 3t^2 + 2t^3).$$

Snadným výpočtem

$$\partial_{\boldsymbol{h}} f(1,0,0) = \varphi'(0) = 1.$$

Z Poznámky 5.2 i z konkrétních příkladů vidíme, že derivace ve směru se dá mechanicky převést na výpočet derivace průřezové funkce, která závisí pouze na jediném argumentu. Později uvidíme, že tento výpočet se dá mnohdy pohodlněji provést i bez stanovení průřezové funkce. Redukce na derivaci funkce s jedním argumentem však říká, že pro směrové derivace musí platit stejná pravidla jako pro derivaci funkce pouze jedné proměnné. Pro úplnost si je uvedeme v následující větě.

Věta 5.4. *Nechť f a g jsou funkce definované na otevřené množině G v euklidovském prostoru X. Předpokládejme, že f i g mají derivace v bodě $\boldsymbol{x} \in G$ ve směru vektoru $\boldsymbol{h} \in X$. Pak existují derivace funkcí $f+g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ ve směru $\boldsymbol{h}$ a platí*

(i) $\partial_{\boldsymbol{h}}(f+g)(\boldsymbol{x}) = \partial_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) + \partial_{\boldsymbol{h}} g(\boldsymbol{x})$,

(ii) $\partial_{\boldsymbol{h}}(fg)(\boldsymbol{x}) = \partial_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x})\ g(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x})\,\partial_{\boldsymbol{h}} g(\boldsymbol{x})$,

(iii) $\partial_{\boldsymbol{h}}\Big(\dfrac{f}{g}(\boldsymbol{x})\Big) = \dfrac{\partial_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x})\ g(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})\partial_{\boldsymbol{h}} g(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})^2}$ *, je-li* $g(\boldsymbol{x}) \neq 0$.

V aplikacích i teorii hrají významnou úlohu směrové derivace vůči kanonickým jednotkovým vektorům standardní baze v $\mathbb{R}^n$:

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0 \dots, 0), \dots, \boldsymbol{e}_n = (0, \dots, 0, 1),$$

Tyto derivace totiž udávají jak daná funkce závisí na jednotlivých proměnných.

Definice 5.5. *Nechť $f\colon G \to \mathbb{R}$ je funkce definovan8 na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^n$.* **Parciální derivací funkce f v bodě $\boldsymbol{x} \in G$ podle k proměnné** x_i $(i = 1, \dots, n)$ *nazýváme směrovou derivaci $\partial_{\boldsymbol{e}_i} f(\boldsymbol{x})$. Pro její označení používáme zápis*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}).$$

Vektor

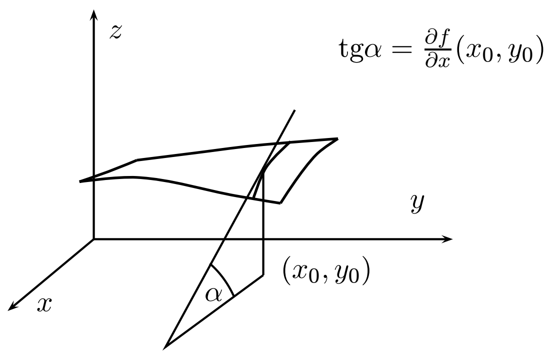
$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \right)$$

se nazývá **gradient** *funkce f v bodě $\boldsymbol{x}$.*

Podle Poznámky 5.2 je parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ rovna derivaci $\varphi'(0)$, kde

$$\varphi(t) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Protože se v této funkci mění pouze i-tá složka, můžeme parciální derivaci spočítat mechanicky tak, že derivujeme podle vyznačené proměnné a ostatní proměnné přitom považujeme za konstanty. Geometrický význam parciálních derivací je odvozen od významu derivace směrové. Každá parciální derivace funkce dvou proměnných například udává směrnici řezu grafem funkce rovnoběžného s příslušnou osou tak, jak je to znázorněno na následujícím obr. 5.2:



Obr. 5.2.

Příklad 5.6. (i) Určíme parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ funkce $f(x, y) = e^{x - y^2}$. Podle postupu naznačeného výše je

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= e^{x - y^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= e^{x - y^2}(-2y). \end{aligned}$$

(ii) Stanovme parciální derivace funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Pokud je $(x,y) \neq (0,0)$ můžeme derivovat zcela mechanicky

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy^2(x^4+y^4) - x^2y^2 4x^3}{(x^4+y^4)^2} = \frac{-2x^5y^2 + 2xy^6}{(x^4+y^4)^2}.$$

Parciální derivaci podle proměnné y můžeme díky symetrii v proměnných získat z předchozího vztahu pouhou záměnou symbolů x a y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y^5x^2 + 2yx^6}{(x^4+y^4)^2}.$$

Zvláštní je případ výpočtu parciální derivace v bodě $(0,0)$. Zde se musíme dívat na hodnoty f na souřadnicových osách. Tam je ovšem f konstantní

$$f(x,0) = f(0,y) = 0 \text{ pro všechna } x, y \in \mathbb{R}.$$

Proto jsou obě parciální derivace v bodě $(0,0)$ nulové, což může být také krátce vyjádřeno jako

$$\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0).$$

Na tomto příkladě si povšimněme dvou důležitých okolností. Restrikce funkce $f(x,y)$ na přímku $y = kx$, $k \neq 0$, je funkce nespojitá v bodě 0. Odtud vyplývá, že i celá funkce $f(x,y)$ není v $(0,0)$ spojitá. Přesto obě parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ v bodě $(0,0)$ existují a jsou konečné. Existence vlastních parciálních derivací nezaručuje spojitost.

Druhá zvláštnost je ta, že ze všech směrových derivací v bodě $(0,0)$ existují jen ty ve směru osy x a y. Existence parciálních derivací nezaručuje existenci derivací v ostatních směrech.

Parciální derivace se často používají při popisu systémů (přírodních i společenských věd) a jejich vývoje. Představme si například funkci $u(x,t)$, která udává výchylku struny v bodě x a čase t. Pro pevné t_0 je graf průřezové funkce $u(x,t_0)$ tvar struny v čase t_0. Pro pevné x_0 je další průřezová funkce $u(x_0,t)$ záznamem pohybu bodu na struně se souřadnicí x_0. Jedna parciální derivace $\frac{\partial u}{\partial x}$ tedy souvisí s geometrickým tvarem struny, druhá $\frac{\partial u}{\partial t}$ má fyzikální význam rychlosti daného bodu na struně.

V dalším výkladu budeme často používat následující zobecněnou verzi Lagrangeovy věty o střední hodnotě.

Věta 5.7. *Nechť f je funkce definovaná na otevřené množině G v euklidovském prostoru. Nechť $I \subset G$ je úsečka s krajními body $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{h} \in G$. Předpokládejme, že f je spojitá na úsečce I a má v každém vnitřním bodě úsečky bodě I směrovou derivaci vzhledem k vektoru $\boldsymbol{h}$. Pak existuje $\vartheta \in (0,1)$ tak, že*

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) = \partial_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}+\vartheta\boldsymbol{h}). \tag{5.2}$$

Důkaz. Budeme se zabývat restrikcí funkce f na úsečku s krajními body $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}$. Položíme

$$\varphi(t) = f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h}), \qquad t \in \langle 0,1\rangle.$$

Pak $\varphi(0) = f(\boldsymbol{x})$, $\varphi(1) = f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})$ a dále $\varphi'(t) = \partial_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h})$. Funkce φ splňuje všechny předpoklady Lagrangeovy věty pro funkci jedné proměnné. Proto můžeme psát

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\vartheta) \text{ pro jisté } \vartheta \in (0,1).$$

Vrátíme-li se k původnímu značení dostaneme rovnost (5.2). □

Věta 5.7 říká, že rozdíl funkčních hodnot je roven jisté směrové derivaci v bodě mezi nimi. Podívejme se na speciální případ, kdy $\boldsymbol{h} = \delta \boldsymbol{e}_i$, kde $\delta > 0$. Při splnění předpokladů Věty 5.7 máme

$$f(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{e}_i) - f(\boldsymbol{x}) = \partial_{\delta\boldsymbol{e}_i} f(\boldsymbol{x}+\vartheta\delta\boldsymbol{e}_i) = \delta\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}+\vartheta\delta\boldsymbol{e}_i),$$

pro jisté $\vartheta \in (0,1)$. Jinými slovy, označíme-li součin $\vartheta\delta$ jen symbolem ϑ, existuje $0 < \vartheta < \delta$, pro které

$$f(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{e}_i) - f(\boldsymbol{x}) = \delta\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}+\vartheta\boldsymbol{e}_i). \tag{5.3}$$

Tento vztah budeme potřebovat vždy, když budeme chtít nalézt souvislost mezi funkčními hodnotami a hodnotami parciálních derivací.

Chceme-li rozepsat rovnici (5.2) do detailu např. pro funkci dvou proměnných, musíme za $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{h}$ dosadit jejich explicitní vyjádření ve složkách: $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2)$, $\boldsymbol{h} = (h_1,h_2)$. Pak máme (5.2) v tomto tvaru

$$f(x_1+h_1,x_2+h_2) - f(x_1,x_2) = h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+\vartheta h_1, x_2+\vartheta h_2) + h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1+\vartheta h_1, x_2+\vartheta h_2).$$

Směrové a parciální derivace tedy poskytují jistou informaci o chování funkce na dílčích přímkách. To je často málo. Podívejme se na následující příklad.

Příklad 5.8. Nechť

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & y = x^2, x \neq 0 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Graf této funkce je parabola bez svého vrcholu vysunutá nad rovinu xy do výšky 1. Pro každou přímku proloženou počátkem najdeme prstencové okolí počátku, ve kterém neleží její průsečík s parabolou $y = x^2$. Blízko počátku má tedy funkce f na těchto přímkách nulovou hodnotu. Znamená to, že

$$\partial_{\boldsymbol{h}} f(0,0) = 0 \text{ pro všechna } \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^2.$$

Na druhé straně f není v bodě $(0,0)$ spojitá. Neplatí tedy to na co jsme zvyklí z teorie funkcí jedné proměnné. Pro funkce více proměnných ani existence derivací ve všech směrech neimplikuje spojitost.

Tento nedostatek odstraňuje jiné pojetí derivace, silnější než derivace ve směru – derivace ve smyslu lineární aproximace. Ale to už je téma další části.

2 Diferenciál funkce

K zavedení diferenciálu vedla snaha nalézt co nejlepší aproximaci obecné funkce pomocí funkce lineární. Důvod pro takovouto aproximaci je skutečnost, že lineární funkce je jednoduchá a snadno se s ní z početního i teoretického hlediska pracuje. Abychom si to lépe ujasnili, podívejme se nejdříve na „proces linearizace“ funkce jedné proměnné. V tomto případě je obecná lineární funkce tvaru $L(x) = ax$, kde $a \in \mathbb{R}$.

Nechť $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Budeme studovat rozdíl funkčních hodnot $f(x_0 + h) - f(x_0)$, kde $h \neq 0$ je přírůstek na ose x. Rozdíl funkčních hodnot rozdělíme (zatím zcela spekulativně) na lineární část a blíže nespecifikovaný zbytek $\omega(h)$, který představuje chybu aproximace. Tedy

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = ah + \omega(h). \tag{5.4}$$

Naši snahou bude zvolit konstantu $a \in R$ tak, aby chyba aproximace $\omega(h)$ byla co nejmenší. První nápad je požadovat, že $\omega(h)$ se bude blížit nule, budeme-li zmenšovat přírůstek h, tj.

$$\lim_{h\to 0} \omega(h) = 0.$$

Bude-li ale funkce f spojitá, pak $\lim_{h\to 0} \omega(h) = 0$ vyjde automaticky z (5.4), ať už je a jakékoliv. To nám k výběru hodnoty a příliš nepomůže. Zkusme tedy být na chybu $\omega(h)$ přísnější a požadujme, aby dokonce

$$\lim_{h\to 0} \frac{\omega(h)}{h} = 0. \tag{5.5}$$

Znamená to, že $\omega(h)$ se musí blížit k nule rychleji než h. Tento požadavek již jednoznačně vymezuje a. Z (5.4) vydělením h máme

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a + \frac{\omega(h)}{h}.$$

Limitním přechodem $h \to 0$ dostaneme závěr, že

$$a = f'(x_0) \iff \lim_{h\to 0} \frac{\omega(h)}{h} = 0.$$

V případě funkce jedné proměnné je tedy existence nejlepší lineární aproximace ekvivalentní s existencí vlastní derivace funkce f v bodě x_0. Navíc vidíme, že optimální lineární aproximace L, která se nazývá diferenciálem funkce f v bodě x_0, je funkce

$$L(h) = f'(x_0) \cdot h.$$

Závěr, ke kterému jsme došli je možno vyjádřit i geometricky: tečna ke grafu funkce je ze všech přímek procházejících daným bodem nejlepším nahrazením grafu v okolí dotykového bodu.

Z příkladu definice diferenciálu funkce jedné proměnné si vezmeme poučení k definici diferenciálu pro funkce $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Rozdělme přírůstek funkce f ve smyslu následující rovnosti

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) = L(\boldsymbol{h}) + \omega(\boldsymbol{h}), \tag{5.6}$$

kde $L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ je lineární zobrazení. Budeme opět požadovat, aby velikost chyby $\omega(\boldsymbol{h})$ klesala k nule rychleji, než přírůstek argumentu, tj. aby

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{\omega(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0.$$

(Zde $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ je vektor, proto musíme chybu $\omega(\boldsymbol{h})$ porovnávat s velikostí vektoru $\boldsymbol{h}$, tj. s $\|\boldsymbol{h}\|$.) Vyjádříme-li $\omega(\boldsymbol{h})$ z rovnice (5.6) dostaneme podmínku

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) - L(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0.$$

Toto zobecnění požadavku (5.5) bude základem pro definici diferenciálu.

Definice 5.9. *Nechť $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ je funkce na otevřené podmnožině $G \subset \mathbb{R}^n$ v euklidovského prostoru. Řekněme, že lineární zobrazení $L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ je* **(totální) diferenciál funkce f v bodě $\boldsymbol{x}_0$** *$\in G$, jestliže*

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) - L(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0. \tag{5.7}$$

Zobrazení, které má v daném bodě diferenciál budeme nazývat diferencovatelné. Pro označení diferenciálu zobrazení f v bodě $\boldsymbol{x}_0$ používáme symbol $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)$. (Pozor tento symbol reprezentuje zobrazení!) Hodnotu tohoto zobrazení v bodě $\boldsymbol{h}$ značíme $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)[\boldsymbol{h}]$.

Pro funkci f a v právě zavedeném označení vypadá definující limita (5.7) pro diferenciál takto

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) - \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)[\boldsymbol{h}]}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0. \tag{5.8}$$

Někdy je výhodné požadavek (5.8) vyjádřit následující ekvivalentní podmínkou. Označíme chybu aproximace opět jako

$$\omega(\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) - \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)[\boldsymbol{h}].$$

Pak (5.8) lze přepsat do tvaru

$$f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) = \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)[\boldsymbol{h}] + \omega(\boldsymbol{h}), \quad \lim_{\boldsymbol{h}\to 0} \frac{\omega(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0. \tag{5.9}$$

Tento tvar říká, že rozdíl hodnot funkce f je roven příslušnému diferenciálu plus chyba $\omega(\boldsymbol{h})$, jejíž velikost je zanedbatelná vzhledem k $\|\boldsymbol{h}\|$.

V úvodní pasáži jsme viděli, že funkce jedné proměnné má diferenciál právě tehdy, když má derivaci, přičemž hodnota derivace je koeficient diferenciálu. Dalším samozřejmým příkladem je diferenciál lineárního zobrazení L. V tomto případě je

$$\mathrm{d}L(\boldsymbol{x}) = L \text{ pro všechna } \boldsymbol{x}.$$

Díky linearitě totiž máme

$$\frac{L(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - L(\boldsymbol{x}) - L(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = \frac{L(\boldsymbol{x}) + L(\boldsymbol{h}) - L(\boldsymbol{x}) - L(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = \boldsymbol{0}$$

a tudíž volba $\mathrm{d}L(\boldsymbol{x}) = L$ vyhoví rovnosti (5.7). Tento fakt jistě nepřekvapí, neboť co už by mohlo být lepší lineární aproximací lineárního zobrazení než toto zobrazení samotné? Pro ilustraci se podívejme na další příklady.

Příklad 5.10. Ověříme podle definice, že lineární funkce $L(h_1,h_2) = 2(h_1+h_2)$ je diferenciálem funkce $f(x,y) = x^2+y^2$ v bodě $(1,1)$ Za tímto účelem se věnujme limitě v (5.7).

$$\begin{aligned}
&\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(1+h_1,1+h_2)-f(1,1)-L(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \\
&= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{(1+h_1)^2+(1+h_2)^2-2-2h_1-2h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \sqrt{h_1^2+h_2^2} = 0.
\end{aligned}$$

Opravdu tedy platí

$$\mathrm{d}f(1,1)[(h_1,h_2)] = 2(h_1+h_2).$$

Jak se uhodne, že právě námi zvolené zobrazení je diferenciálem, si řekneme později.

Následující tvrzení říká, že hodnota diferenciálu není nic jiného, než nám již známá směrová derivace.

Tvrzení 5.11. *Je-li funkce f diferencovatelné v bodě $\boldsymbol{x}$ euklidovského prostoru $\mathbb{R}^n$, pak má v tomto bodě všechny směrové derivace a platí*

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{h}] = \partial_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) \text{ pro všechna } \boldsymbol{h} \in X. \tag{5.10}$$

Důkaz. Je-li $\boldsymbol{h} = 0$, tak rovnice (5.10) je triviálně splněna. Pro $\boldsymbol{h} \neq 0$ a $t > 0$ budeme počítat rozdíl

$$\begin{aligned}
\partial_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) - \mathrm{d}f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{h}] &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0)}{t} - \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)[\boldsymbol{h}] = \\
&= \lim_{t\to 0} \left(\frac{f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0)}{t} - \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)[\boldsymbol{h})] \right) = \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0) - \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)[t\boldsymbol{h}]}{\|t\boldsymbol{h}\|} \|\boldsymbol{h}\| = 0
\end{aligned}$$

podle (5.8). Pro $t < 0$ je výpočet analogický, a tím je rovnost ověřena. □

Tvrzení 5.11 má mimo jiné důležitý důsledek. Pro diferencovatelné funkce je derivace ve směru vektoru $\boldsymbol{h}$ lineární kombinací parciálních derivací podobně jako jsou obecné vektory kombinací prvků standardní báze. Podívejme se na to podrobněji. Nechť f je funkce n proměnných diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Vektor $\boldsymbol{h}$ si napišme jako lineární kombinaci bazových vektorů $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$:

$$\boldsymbol{h} = h_1\boldsymbol{e}_1 + h_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + h_n\boldsymbol{e}_n.$$

V důsledku Tvrzení 5.11 a linearity diferenciálu $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})$ máme

$$\begin{aligned}
\partial_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) &= \mathrm{d}f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{h}] = \mathrm{d}f(\boldsymbol{x})[h_1\boldsymbol{e}_1 + h_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + h_n\boldsymbol{e}_n] \\
&= h_1\,\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{e}_1] + h_2\,\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{e}_2] + \cdots + h_n\,\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{e}_n] \\
&= h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) + h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) + \cdots + h_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \\
&= \boldsymbol{h}\cdot \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}). \qquad (5.11)
\end{aligned}$$

Tím jsme získali důležitý vzorec pro počítání derivací ve směru:

$$\partial_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}). \tag{5.12}$$

Příklad 5.12. Pro funkci $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ vypočtěte derivaci ve směru $\boldsymbol{h} = (-1,1,1)$ v bodě $\boldsymbol{x} = (1,2-1)$.

Podle (5.12) stačí skalárně vynásobit směr $\boldsymbol{h}$ a $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) = (2,4,2)$:

$$\partial_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) = (-1,1,1) \cdot (2,4,2) = 4.$$

Uvedeme si ještě jiný zápis diferenciálu, který je obvyklý v technické literatuře. Nechť $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$. Označíme si projekce na i-tou souřadnici symbolem x_i, tj. x_i je funkce $x_i \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, která má v bodě $\boldsymbol{h}$ hodnotu

$$x_i(\boldsymbol{h}) = h_i.$$

Tyto funkce je zřejmě lineární. Proto, jak už víme, $\mathrm{d}x_i = x_i$. Diferenciál $\mathrm{d}x_i$ je tak rovněž projekce na i-tou souřadnici,

$$\mathrm{d}x_i[\boldsymbol{h}] = h_i. \tag{5.13}$$

Podíváme-li se zpět na výpočet v (5.11), vidíme, že hodnota diferenciálu $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{h}$ je

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{h}] &= \frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1[\boldsymbol{h}] + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2[\boldsymbol{h}] + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n[\boldsymbol{h}],\end{aligned}$$

kde jsme použili (5.13). Hodnota funkce $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{h}$ je lineární kombinací funkcí $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n$ v témže bodě $\boldsymbol{h}$. Koeficienty této lineární kombinace jsou parciální derivace. Můžeme tedy psát rovnost mezi dvěma funkcemi ve tvaru

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_n. \tag{5.14}$$

Např. diferenciál funkce dvou proměnných $f(x,y)$ má při této konvenci tvar

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y.$$

Pro funkci $f(x,y,z)$ pak

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z.$$

Zde je na místě varování! Symboly $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ a $\mathrm{d}z$ neznamenají žádné záhadné nekonečně malé veličiny. Je to označení pro velice jednoduché funkce. V případě $\mathbb{R}^3$ jdou $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ a $\mathrm{d}z$ funkce tří proměnných definované

$$\mathrm{d}x[h_1,h_2,h_3] = h_1, \quad \mathrm{d}y[h_1,h_2,h_3] = h_2, \quad \mathrm{d}z[h_1,h_2,h_3] = h_3.$$

Ve zkráceném označení, kdy $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, h_3)$ je zápis

$$\mathrm{d}x[\boldsymbol{h}] = h_1, \quad \mathrm{d}y[\boldsymbol{h}] = h_2, \quad \mathrm{d}z[\boldsymbol{h}] = h_3.$$

Tento způsob se nám bude hodit při zkoumání derivací složených zobrazení.

Víme již, jak diferenciál funkce vypadá. Nevíme však prozatím v jakých případech existuje. Jak ukazuje následující důležitá věta je nutnou podmínkou existence diferenciálu spojitost funkce.

Věta 5.13. *Každá funkce diferencovatelné v daném bodě je v tomto bodě spojitá.*

Důkaz. Funkce f, která je diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{x}$ je definovaná na jistém okolí bodu $\boldsymbol{x}$ a podle (5.8) platí

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}) + \mathrm{d}f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{h}] + \omega(\boldsymbol{h}),$$

kde $\omega(\boldsymbol{h})/\|\boldsymbol{h}\| \to 0$ pro $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}$. Tím spíše i $\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \omega(\boldsymbol{h}) = 0$. Limitním přechodem v předchozím vztahu tak dostaneme

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}) + \mathrm{d}f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{0}] = f(\boldsymbol{x}).$$

Funkce f je tedy spojitá a důkaz je ukončen. □

Z Příkladu 5.8 víme, že samotná existence všech směrových derivací v daném bodě ještě neznamená spojitost v daném bodě. Tím spíše diferencovatelnost. Ukazuje se však, že při přísnějším požadavku na parciální derivace již diferenciál musí existovat. Toto kritérium existence diferenciálu je obsahem následující věty.

Věta 5.14. *Nechť f je funkce, jejíž všechny parciální derivace jsou spojité v bodě $\boldsymbol{x}$. Pak f má v bodě $\boldsymbol{x}$ diferenciál.*

Důkaz. Spojitost parciálních derivací mimo jiné znamená, že jsou v jistém okolí bodu $\boldsymbol{x}$ definovány. Podíváme-li se na výpočet v (5.11), vidíme, že jediný kandidát na diferenciál je lineární funkce L tvaru

$$L(\boldsymbol{h}) = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{h}.$$

Důkaz provedeme pro funkce dvou proměnných $f(x_1, x_2)$; obecný případ se liší pouze počtem proměnných a tudíž jen delšími zápisy příslušných výrazů. Musíme ovšem dokázat, že

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) = \omega(\boldsymbol{h}), \text{ kde } \lim_{\boldsymbol{h}\to 0} \frac{\omega(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0.$$

Důkaz provedeme pro funkce dvou proměnných $f(x_1, x_2)$; obecný případ se liší pouze počtem proměnných a tudíž jen delšími zápisy příslušných výrazů. Abychom dostali do hry parciální derivace v okolí bodu $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, pokusíme se pomocí nich vyjádřit rozdíl funkčních hodnot $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x})$. K dispozici máme Větu 5.7 o střední hodnotě. Rozdíl funkčních hodnot však musíme upravit tak, aby obsahoval rozdíly v bodech lišících se pouze v jedné souřadnici. Označíme-li $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2)$, pak si tento rozdíl rozepíšeme podrobněji

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) &= f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2) = \\ &= \Big[f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2 + h_2)\Big] + \Big[f(x_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2)\Big]. \end{aligned}$$

Rozdíl v hranaté závorce vyjádříme pomocí parciálních derivací. Věta 5.7 o střední hodnotě nám umožňuje tyto rozdíly napsat jako

$$\begin{aligned} f(x_1+h_1,x_2+h_2)-f(x_1,x_2+h_2) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+\vartheta_1 h_1, x_2+h_2)h_1, \\ f(x_1,x_2+h_2)-f(x_1,x_2) &= \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2+\vartheta_2 h_2)h_2, \end{aligned}$$

pro jistá $\vartheta_1, \vartheta_2 \in (0,1)$. Tí jsme dostali

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+\vartheta_1 h_1, x_2+h_2)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2+\vartheta_2 h_2)h_2.$$

Chyba $\omega(\boldsymbol{h})$ má teď tvar

$$\begin{aligned} \omega(\boldsymbol{h}) &= f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{h}\cdot \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+\vartheta_1 h_1, x_2+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)\right)h_1 + \\ &\qquad + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2+\vartheta_2 h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right)h_2. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Díky spojitosti parciálních derivací jsou obě závorky v limitě nulové

$$\begin{aligned} \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+\vartheta_1 h_1, x_2+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)\right) &= 0, \\ \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2+\vartheta_2 h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right) &= 0. \end{aligned}$$

Protože $|h_1|/\|\boldsymbol{h}\| \le 1$ i $|h_2|/\|\boldsymbol{h}\| \le 1$, je

$$\begin{aligned} \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{\omega(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \Bigg\{ &\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+\vartheta_1 h_1, x_2+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)\right)\frac{h_1}{\|\boldsymbol{h}\|} + \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2+\vartheta_2 h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right)\frac{h_2}{\|\boldsymbol{h}\|}\Bigg\} = 0. \end{aligned}$$

Ukázali jsme, že chyba aproximace $\omega(\boldsymbol{h})$ je zanedbatelná vůči $\|\boldsymbol{h}\|$, a tím je důkaz ukončen. $\square$

Spojitost parciálních derivací tedy postačí pro existenci diferenciálu. Je to velmi pohodlné kritérium, které můžeme použít v drtivé většině aplikací. Není to však podmínka nutná. Existuje totiž funkce, která nemá spojité parciální derivace, ale přesto je diferencovatelná (Cvičení 12.).

Funkce, které mají spojité parciální derivace podle všech proměnných, se nazývají *spojitě diferencovatelné*. Je to silnější požadavek než pouhá diferencovatelnost.

Podívejme se na příklad, jak nám Věta 5.14 pomůže ve zjištění, kde má funkce diferenciál.

Příklad 5.15. Nechť $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$. Budeme vyšetřovat diferenciál v obecném bodě $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Pro $(x,y) \neq (0,0)$ můžeme určit parciální derivace mechanickým derivováním složené funkce:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{2\sqrt{|xy|}} \operatorname{sgn}(xy)y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{1}{2\sqrt{|xy|}} \operatorname{sgn}(xy)x. \end{aligned}$$

Tyto derivace jsou spojité a na základě Věty 5.14 můžeme konstatovat, že f je diferencovatelná v každém bodě množiny $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pro tyto body máme

$$\mathrm{d}f(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{|xy|}} \operatorname{sgn}(xy)y \ \mathrm{d}x + \frac{1}{2\sqrt{|xy|}} \operatorname{sgn}(xy)x \ \mathrm{d}y.$$

Zvláštním případem je bod $(0,0)$. Protože je f je identicky rovna nule na souřadnicových osách je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Jediný možný kandidát na diferenciál je tedy nulová funkce. Zabývejme se proto výrazem

$$\frac{f(\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{0}) - 0}{\|\boldsymbol{h}\|} = \frac{\sqrt{|h_1 h_2|}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}.$$

Tento výraz nemá limitu pro $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}$, neboť vzhledem k souřadnicovým osám je limita nulová, zatímco vzhledem přímce o rovnici $h_1 = h_2$ je rovna $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Funkce f tedy není diferencovatelná v počátku.

Z teorie funkce jedné proměnné víme, že funkce s nulovou derivací na intervalu je konstantní. Následující věta je zobecněním této skutečnosti.

Věta 5.16. *Funkce, která má na okolí U bodu $\boldsymbol{x}$ nulové všechny parciální derivace, je na tomto okolí konstantní.*

Důkaz. Nechť f je funkce s nulovými parciálními derivacemi na okolí U. Tyto parciální derivace jsou samozřejmě spojité v U, a proto je f diferencovatelná v každém bodě U podle Věty 5.14. Protože $\mathrm{d}f = 0$ na U, jsou nulové i všechny směrové derivace (viz. Tvrzení 5.11). Zvolíme si libovolně dva body $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U$ a ukážeme, že $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y})$.

Nechť L je úsečka spojující body $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$. Z Věty 5.7 o střední hodnotě víme, že pro jistý bod $z \in L$ platí

$$f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) = \partial_{(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{z}) = 0.$$

Tím je důkaz ukončen. □

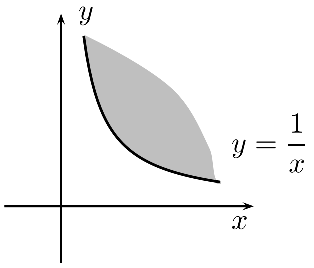
Poznámka 5.17. Věta 5.16 je formulována pro okolí bodu U. Platí však i pro obecnější množiny, tzv. souvislé množiny (viz Kap.4, část 2). Pokud čtenář nechce jít do hloubky a prostudovat si tento pojem, pro valnou většinu příkladů postačí intuitivní představa, že souvislá množina je taková, která se neskládá z více oddělených kusů.

S aplikací Věty 5.16 se můžeme setkat v teorii potenciálu [1]. Její parafrází je, že dvě funkce se stejnými parciálními derivacemi se liší pouze o konstantu.

Příklad 5.18. Ověřte platnost následujícího vzorce často uváděného v technické literatuře

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} & xy < 1 \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} & x > 0, xy > 1 \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} & x < 0, xy > 1. \end{cases}$$

Ukážeme nejdříve, že funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y$ a $g(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$ mají stejné parciální derivace.



Obr. 5.3

Skutečně,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{(x+y)^2}{(1-xy)^2}} \cdot \frac{1 - xy + (x+y)y}{(1-xy)^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Tedy $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial x}$ a stejně tak $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial y}$ z důvodu symetrie v proměnných. Uvažujme množinu

$$G = \{(x,y) \mid x > 0, xy > 1\}.$$

(V ostatních případech je postup analogický a přenecháme jej čtenáři.) Množina G je část roviny nad větví hyperboly, viz obr. 5.3. Protože G je souvislá, můžeme podle poznámky 5.17 aplikovat Větu 5.16. Dostaneme, že $f - g =$konst na G. Zbývá ukázat, že tato konstanta musí být rovna číslu π. Podívejme se např. na hodnoty funkce $f - g$ na polopřímce $\{(1,y) \mid y > 1\}$. Zde máme

$$\text{konst} = f(1,y) - g(1,y) = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} \frac{1+y}{1-y}.$$

Limitním přechodem $y \to \infty$ v této rovnosti dostaneme

$$\text{konst} = \pi/4 + \pi/2 - \operatorname{arctg}(-1) = \pi/4 + \pi/2 + \pi/4 = \pi.$$

3 Geometrický a fyzikální význam diferenciálu

V předchozích částech jsme se věnovali otázce existence diferenciálu a jeho výpočtu. Nyní si uvedeme několik aplikací dříve získaných poznatků.

3.1 Tečná rovina a normála ke grafu funkce

Předpokládejme, že funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^2$. Geometricky tento fakt znamená, že existuje tečná rovina T ke grafu funkce f v bodě $(\boldsymbol{x}_0, f(\boldsymbol{x}_0))$. Je popsána pomocí diferenciálu jako graf funkce

$$z = f(\boldsymbol{x}_0) + \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)[\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0]. \tag{5.16}$$

Tento vzorec platí nejen v případě $\mathbb{R}^2$, ale obecně pro euklidovský prostor $\mathbb{R}^n$. V tom případě je graf funkce f $(n-1)$-rozměrná plocha a tečná rovina je $(n-1)$-rozměrná nadrovina. Pro funkci dvou proměnných můžeme vztah (5.16) ještě rozepsat podrobněji: Nechť $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0)$ a $\boldsymbol{x} = (x, y)$. Rovnice zadávající tečnou rovinu je

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0). \tag{5.17}$$

Známe-li rovnici tečné roviny (5.17) ke grafu funkce f, můžeme z ní odvodit tvar normálového vektoru. K tomu účelu si rovnost (5.17) přepíšeme do tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot y - z + \left(f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, x_0 - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, y_0 \right) = 0.$$

Koeficienty u proměnných x, y a z tvoří složky vektoru kolmého na tečnou rovinu, tj. normály. Máme tak následující závěr: **Normálový vektor** ke grafu funkce f v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ je každý nenulový násobek vektoru kolmého na tečnou rovinu, tedy libovolný nenulový násobek vektoru

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right).$$

Příklad 5.19. (i) Nalezněme tečnou rovinu a normálu ke grafu funkce $f(x, y) = xy$ v bodě $(1, 1, 1)$.

Funkce f má spojité parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x} = y, \frac{\partial f}{\partial y} = x$, a proto je diferencovatelná v každém bodě. Tečná rovina je tedy definována všude. Konkrétně pro bod $(1, 1, 1)$ dostaneme z (5.17) rovnici

$$z = 1 + 1(x - 1) + 1(y - 1), \quad \text{tj.} \quad x + y - z + 1 = 0.$$

Koeficienty u x, y, z tvoří normálový vektor $\boldsymbol{n} = (1, 1, -1)$.

(ii) Zabývejme se tečnými rovinami ke grafu funkce

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},$$

tedy ke kuželové ploše, viz obr.2.5(b). Pro nenulový vektor (x_0, y_0) máme

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}. \end{aligned}$$

Vzhledem ke spojitosti parciálních derivací je funkce f diferencovatelné v bodě (x_0, y_0). Tečná rovina má pak rovnici

$$z = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} + \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}(x - x_0) + \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}(y - y_0).$$

Výjimkou je případ $(0, 0)$ – vrchol kuželové plochy. V tomto bodě neexistují ani parciální derivace funkce f, neboť například $f(x, 0) = |x|$ nemá derivaci v nule. Graf funkce f nemá v bodě $(0, 0)$ tečnou rovinu, což je geometricky zřejmé.

3.2 Gradient jako směr největšího spádu

V tom to odstavci si přiblížíme fyzikální význam gradientu. Vraťme se opět k modelové situaci, se kterou jsme začali v úvodu této kapitoly. Naše poloha na mapě má souřadnice (x_0, y_0). V terénu, který je grafem funkce $f(x, y)$ se budeme v průmětu na mapu pohybovat rovnoměrně přímočaře s jednotkovou rychlostí $\boldsymbol{h}$, $\|\boldsymbol{h}\| = 1$. Zajímá nás v jakém směru máme největší vertikální rychlost. Tato rychlost je rovna směrové derivaci $\partial_{\boldsymbol{h}} f(x_0, y_0)$. Z důležité rovnosti (5.12) víme, že

$$\partial_{\boldsymbol{h}} f(x_0, y_0) = \boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad} f(x_0, y_0).$$

Použijeme-li na tento skalární součin Schwarzovu nerovnost (Věta 1.1,(ii)), dostaneme

$$|\partial_{\boldsymbol{h}} f(x_0, y_0)| = |\boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad} f(x_0, y_0)| \leq \|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\| \cdot \|\boldsymbol{h}\| = \|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\|.$$

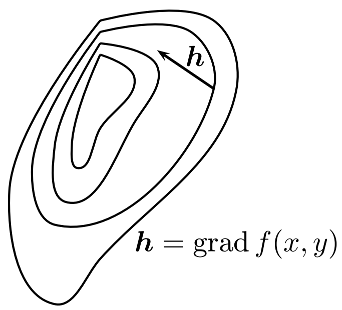
Hodnota směrové derivace se tedy pohybuje v intervalu

$$\langle -\|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\|, \|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\| \rangle.$$

Je-li gradient nenulový, pak největší a nejmenší hodnoty dosáhneme volbou směrů

$$\begin{aligned} \boldsymbol{h}_{\max} &= \frac{\operatorname{grad} f(x_0, y_0)}{\|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\|} \\ \boldsymbol{h}_{\min} &= -\frac{\operatorname{grad} f(x_0, y_0)}{\|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\|}. \end{aligned}$$

Vydáme-li se tedy ve směru gradientu budeme maximálně stoupat. Půjdeme-li ve směru opačném budeme maximálně klesat (vertikální rychlost bude záporná). V případě pohybu ve směru kolmém na gradient budeme mít vertikální rychlost nulovou. V tomto případě se nadmořská výška měnit nebude a my se budeme pohybovat po vrstevnici viz. obr 5.4.



Obr. 5.4

Význam gradientu jsme si vysvětlili v případě funkce dvou proměnných. Všechny argumenty, které jsme použili jsou ovšem platné i v obecném případě.

Příklad 5.20. Hora má tvar eliptického paraboloidu, který je grafem funkce

$$f(x,y) = 1 - x^2 - 2y^2.$$

V jejím vrcholu $(0,0,1)$ stojí lyžař. Po jaké dráze se má pohybovat, aby se z vrcholu dostal do bodu $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$ a přitom aby jeho vertikální rychlost byla v každém bodě maximální možná ?

Lyžař se musí pohybovat po křivce největšího spádu. Popišme si dráhu pohybu pomocí dvojice funkcí $(x(t), y(t))$ udávající průmět polohy lyžaře do roviny xy v čase $t \geq 0$. Aby maximalizoval rychlost v každém bodě, musí se lyžař pohybovat ve směru gradientu, tj. ve směru

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (-2x, -4y).$$

Horizontální složka vektoru rychlosti, tj. vektor $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ je tedy násobkem vektoru $(-2x(t), -4y(t))$. Neboli (za nutných předpokladů nenulovosti jmenovatelů)

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = \frac{\dot{y}(t)}{2y(t)}$$

Integrací podle t vztahu dostaneme

$$\ln |x(t)| = \ln \sqrt{|y(t)|} + c.$$

Po „odlogaritmování" a přeznačení konstanty

$$|x(t)| = k\sqrt{|y(t)|}.$$

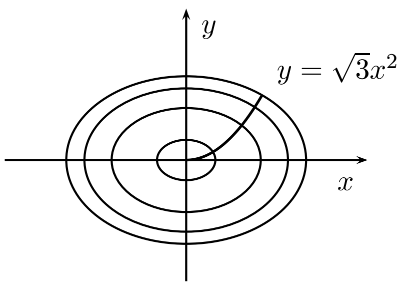
Jinými slovy, dráha musí respektovat rovnici

$$|x| = k\sqrt{|y|} \qquad (5.18)$$

a procházet bodem $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$. Dosazením hodnot $x = y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ získáme $k = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$. Umocněním vztahu (5.18) dostáváme výsledek

$$y = \sqrt{3}x^2,$$

což je rovnice paraboly. Lyžař se tedy bude pohybovat po vypočtené parabole, která má tu vlastnost, že je kolmá ke všem vrstevnicím. Vrstevnice jsou přitom tvořeny soustavou elips se středem v počátku, viz. obr. 5.5.



Obr. 5.5

Důležitý pohled na význam gradientu dává ještě jiná interpretace vektoru kolmého na vrstevnice grafu funkce. Předpokládejme, že máme v rovině graf funkce

$$y = g(x).$$

Tuto rovnici můžeme přepsat ve tvaru

$$g_1(x, y) = 0, \text{ kde } g_1(x, y) = g(x) - y.$$

Vidíme, že graf funkce $y = g(x)$ je nulovou vrstevnicí funkce dvou proměnných $g_1(x, y)$. Protože $\operatorname{grad} g_1$ je kolmý na vrstevnice, je vektor $\operatorname{grad} g_1$ *normálový vektor* ke grafu funkce $y = g(x)$. *Máme-li křivku v rovině zadanou rovnicí $g_1(x, y) = 0$, je* $\operatorname{grad} g_1$ *normálový vektor k této křivce.* Postoupíme-li o dimenzi výše, můžeme podobně najít normálový vektor k ploše dané rovnicí $z = g(x, y)$. *Máme-li plochu v $\mathbb{R}^3$ zadanou rovnicí $g_1(x, y, z) = 0$, je* $\operatorname{grad} g_1$ *normálový vektor k této ploše.* Specielně pro rovnici roviny

$$ax + by + cz + d = 0$$

vidíme, že gradient je vektor (a, b, c). To je známý výsledek z lineární algebry.

Příklad 5.21. Uvažujme povrch elipsoidu o rovnici

$$\frac{x^2}{2} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1. \tag{5.19}$$

V jakém bodě je tečná rovina k elipsoidu rovnoběžná s rovinou σ o rovnici $x + y - 2z = 0$?

Poloosy elipsoidu jsou postupně $\sqrt{2}$, 1 a 3. Má-li být tečná rovina rovnoběžná s rovinou σ, musí být rovnoběžné jejich normálové vektory. Normálový vektor k rovině σ je gradient funkce $f(x, y, z) = x + y - 2z$, tj.

$$\boldsymbol{n}_1 = (1, 1, -2).$$

Normálový vektor k elipsoidu je gradient funkce

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + y^2 + \frac{z^2}{9} - 1,$$

tj. $\boldsymbol{n}_2 = (x, 2y, 2z/9)$. Rovnoběžnost $\boldsymbol{n}_1$ a $\boldsymbol{n}_2$ je ekvivalentní s tím, že jeden vektor je nenulový násobek druhého.

$$\alpha(1, 1, -2) = \left(x, 2y, \frac{2z}{9}\right).$$

Porovnáním odpovídajících složek odtud dostaneme

$$\begin{aligned} x &= \alpha \\ y &= \frac{\alpha}{2} \\ z &= -9\alpha. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Poslední informace, kterou máme k dispozici, je že příslušný bod leží na elipsoidu. Dosadíme tedy do rovnice (5.19)

$$\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{81\alpha^2}{9} = 1.$$

Řešením jsou hodnoty $\alpha = \pm 2/\sqrt{39}$. Máme dva body na elipsoidu vyhovující zadání úlohy

$$\pm\Big(\frac{2}{\sqrt{39}}, \frac{1}{\sqrt{39}}, \frac{-18}{\sqrt{39}}\Big).$$

Kromě výše uvedených aplikací se diferenciál používá v situacích, kdy se snažíme nahradit (za cenu přijatelné chyby) nelineární funkci funkcí lineární. Na tomto principu je založena řada „přibližných vzorců“ a odhadů.

Příklad 5.22. Aproximujme funkci

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1+xy}$$

v okolí bodu $(0,0)$ lineární funkcí.

Aproximace je založena na použití diferenciálu.

$$f(x,y) \approx f(0,0) + \mathrm{d}f(0,0)[(x,y)], \qquad x \approx 0,\ y \approx 0.$$

Konkrétně,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1.$$

Proto $\mathrm{d}f(0,0)[(x,y)] = x + y$ a dostaneme přibližný odhad

$$\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1+xy} \approx x + y.$$

O chybě tohoto odhadu se dozvíme více v souvislosti s Taylorovým polynomem pro funkce více proměnných.

4 Cvičení

Úloha: Teplota $T(x,y)$ v bodě (x,y) roviny je

$$T(x,y) = e^{-x-2y}.$$

V bodě $(0,0)$ je částice, která se pohybuje rychlostí 2 (m/s) na východ a 3 (m/s) na jih. Jaká je okamžitá rychlost změny její teploty v bodě $(0,0)$.

Řešení: Hledaná rychlost je směrovou derivací $\partial_{(2,-3)}T(0,0)$. Protože funkce T má spojité parciální derivace

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -e^{-x-2y},\ \frac{\partial T}{\partial y} = -2e^{-x-2y},$$

je diferencovatelná a

$$\partial_{(2,-3)}T(0,0) = 2\frac{\partial T}{\partial x}(0,0) - 3\frac{\partial T}{\partial y}(0,0) = 4.$$

Úloha: Výchylka struny $u(x,t)$ v bodě $x \in \mathbb{R}$ a čase $t \in \mathbb{R}$ se řídí zákonem

$$u(x,t) = 2\sin(\omega t + x), \qquad \omega > 0;$$

Určete rychlost struny v bodě $x = 5$ a čase $t = 10$. Stanovte dále tečnu ke struně v bodě $x = 5$ a čase $t = 5$.

Řešení: Hledaná rychlost je parciální derivací

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 2\omega\cos(\omega t + x);$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(5,10) = 2\omega\cos(10\omega + 5).$$

Pro stanovení tečny je podstatné nalézt její směrnici

$$k = \frac{\partial u}{\partial x}(5,5) = 2\cos(5\omega + 5).$$

Rovnice hledané tečny vznikne dosazením daných hodnot do obecného tvaru $y = k(x - x_0) + y_0$

$$y = 2\cos(5\omega + 5)(x - 5) + 2\sin(5\omega + 5).$$

Úloha: Tlak p osmi grammolekul ideálního plynu klesá rychlostí 0.4 a jeho teplota T klesá rychlostí 0.5 . Jak rychle se mění objem V, když počáteční hodnoty jsou $V = 1000$ a $p = 3$. Stoupá či klesá?

Řešení: Podle stavové rovnice je

$$V(p,T) = \frac{8RT}{p},$$

kde R je plynová konstanta. Při zadaných parametrech V a p je $T = \dfrac{3000}{8R}$. Změna objemu je dána směrovou derivací

$$\partial_{(-0.4,\,-0.5)} V\left(3, \frac{3000}{8R}\right).$$

K výpočtu můžeme vzhledem k diferencovatelnosti funkce použít parciální derivace

$$\frac{\partial V}{\partial p} = -\frac{8RT}{p^2}, \qquad \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{8R}{p},$$

$$\frac{\partial V}{\partial p}\left(3, \frac{3000}{8R}\right) = -\frac{1000}{3}, \qquad \frac{\partial V}{\partial T}\left(3, \frac{3000}{8R}\right) = \frac{8}{3}R.$$

Konečně po výpočtu

$$\partial_{(-0.4,-0.5)} V(3, \frac{3000}{8R}) = -0.4 \cdot \left(-\frac{1000}{3}\right) - 0.5\frac{8}{3}R = \frac{4}{3}(100 - R) > 0.$$

($R \doteq 8,315$). Vypočtená směrová derivace je kladná a objem tedy roste.

Úloha: Určete směrové derivace funkce

$$f(x,y,z) = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3}$$

v bodě $(0,0,0)$. Rozhodněte zda v tomto bodě existuje diferenciál.

Řešení: Pro $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, h_3)$ platí

$$\partial_{\boldsymbol{h}} f(0,0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{t\sqrt[3]{h_1^3 + h_2^3 + h_3^3}}{t} = \sqrt[3]{h_1^3 + h_2^3 + h_3^3}.$$

Kdyby existoval diferenciál $\mathrm{d}f(0,0,0)$, pak podle Tvrzení 5.11 musí směrové derivace $\partial_{\boldsymbol{h}} f(0,0,0)$ záviset na směru $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, h_3)$ lineárně. Vidíme ale, že směrové derivace nezávisí lineárně na $\boldsymbol{h}$. Funkce f tedy není diferencovatelná v bodě $(0,0,0)$.

Úloha: Má funkce $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|^2}} & \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}, \\ 0 & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

diferenciál v počátku?

Řešení: Spočteme nejdříve parciální derivace.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{0}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t\boldsymbol{e}_i) - f(\boldsymbol{0})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{t^2}}}{t} = 0.$$

(Poslední limitu je možno substitucí $s = 1/t^2$ spočítat pomocí l'Hospitalova pravidla.) Všechny parciální derivace jsou v počátku nulové, a proto jediný možný diferenciál je nulové zobrazení. O tom se musíme přesvědčit výpočtem definiční limity 5.7

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}} \frac{e^{-\frac{1}{\|\boldsymbol{h}\|^2}} - 0 - 0}{\|\boldsymbol{h}\|}.$$

Po substituci $t = \|\boldsymbol{h}\|$ vidíme podle předchozího výpočtu, že tato limita je skutečně nulová. Funkce f je tedy diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{0}$ a její diferenciál je v tomto bodě nulová funkce.

Úloha: Nalezněte vzdálenost roviny ϱ o rovnici $x + y - z = 5$ od paraboloidu zadaného podmínkou $z \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Řešení: Nejbližší bod na paraboloidu musí být dotykovým bodem tečné roviny rovnoběžné s rovinou ϱ. To znamená, že normálový vektor k paraboloidu v zatím neznámém bodě dotyku $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ je násobkem normálového vektoru roviny ϱ. Normála k paraboloidu je

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right) = (x_0, y_0, -1)$$

a normála k ϱ je vektor $(1, 1, -1)$. Tedy $(x_0, y_0, -1) = k(1, 1, -1)$ pro jisté $k \in \mathbb{R}$. Porovnáním třetích složek okamžitě vidíme, že $k = 1, x_0 = y_0 = 1$. Bod o souřadnicích (1,1,1) je hledaným nejbližším bodem na paraboloidu. Jeho vzdálenost od roviny ϱ je (po snadném výpočtu) $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

Úloha: Pro gradient funkce f platí $\operatorname{grad} f(x, y) = (3x, y)$ pro všechna $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Stanovte vrstevnice této funkce.

Řešení: Nechť vrstevnice je křivka popsaná parametricky $(x(t), y(t))$. O funkcích $x(t), y(t)$ budeme předpokládat, že jsou spojitě diferencovatelné na jistém intervalu. Gradient je kolmý na vrstevnice, což znamená, že vektory $(3x(t), y(t))$ a tečný vektor $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ k vrstevnici svírají pravý úhel. Platí proto, že jejich skalární součin je nulový:

$$(3x(t), y(t)) \cdot (\dot{x}(t), \dot{y}(t))) = 3x(t)\dot{x}(t) + y(t)\dot{y}(t) = 0,$$

neboli

$$3x(t)\dot{x}(t) = -y(t)\dot{y}(t).$$

Po integraci podle t

$$\frac{3}{2}x^2(t) = -\frac{y(t)^2}{2} + c.$$

Vrstevnice jsou tedy elipsy o rovnicích

$$x^2 + \frac{y^2}{3} = C, \quad C > 0.$$

Úloha: Je měřena kinetická energie částice o hmotnosti m a rychlosti v. Relativní chyba při stanovení hmotnosti je 1%, při stanovení rychlosti 2%. Použitím diferenciálu stanovte odhad pro relativní chybu měřené energie.

Řešení: Pro konetickou energii E platí

$$E(m, v) = \frac{1}{2}mv^2.$$

Diferenciál této funkce je

$$\mathrm{d}E(m, v) = \frac{1}{2}v^2 \,\mathrm{d}m + mv \,\mathrm{d}v.$$

Odhad chyby příslušné funkce dostaneme tak, že nahradíme hodnotu přírůstku energie $E(m+\Delta m, v+\Delta v) - E(m, v)$ hodnotou diferenciálu $\mathrm{d}E(m, v)$ v bodě $(\Delta m, \Delta v)$:

$$\Delta E = E(m+\Delta m, v+\Delta v) - E(m, v) \approx \mathrm{d}E(m, v)[\Delta m, \Delta v].$$

Tímto způsobem získáme odhad relativní chyby

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\frac{1}{2}v^2\Delta m + mv\Delta v}{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{2\Delta v}{v} \leq 0{,}01 + 2\cdot 0{,}02 = 0{,}05.$$

Podle tohoto odhadu by přibližná horní mez pro relativní chyby byla 5%.

1. Nalezněte derivaci $\partial_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x})$, kde $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2x_3^4 - x_4^2$, $\boldsymbol{h} = (1, 2, 3, 4)$ a $\boldsymbol{x} = (-2, 3, 1, 5)$.
2. Nalezněte parciální derivace funkce
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$
v počátku.
3. Poloměr válce klesá rychlostí 12, jeho výška stoupá rychlostí 25. Jak se mění objem při poloměru 45 a výšce 100?
4. Hmotnost částice klesá rychlostí 2. Jak rychle musí při jednotkové hmotnosti i rychlosti stoupat rychlost, aby energie rostla?
5. Ukažte, že funkce $z(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ vyhovuje rovnici
$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$
6. Ukažte, že funkce $z(x, y) = y^2 \sin(x^2 - y^2)$ vyhovuje rovnici
$$y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = 2xz.$$
7. Ukažte, že stavové veličiny ideálního plynu vyhovují rovnici
$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p} = -1.$$
8. Rozhodněte zda je následující funkce diferencovatelná v počátku
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

9. Ukažte, že funkce mající omezené parciální derivace je stejnoměrně spojitá.

10. Rozhodněte zda funkce

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt[5]{x_1^5 + \cdots + x_n^5}$$

je diferencovatelná v bodě $\mathbf{0}$.

11. Ve kterých bodech je diferencovatelná funkce n proměnných $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ daná předpisem

$$f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|?$$

12. Ukažte, že funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ daná

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \|\boldsymbol{x}\|^2 \sin \dfrac{1}{\|\boldsymbol{x}\|^2} & \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \\ 0 & \boldsymbol{x} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

je diferencovatelná v bodě $\mathbf{0}$. Ukažte, že parciální derivace této funkce nejsou v bodě $(0, 0)$ spojité.

13. Funkce $f(x, y)$ se nazývá homogenní stupně n, platí-li

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y) \quad \text{pro všechna } t \in \mathbb{R}.$$

Ukažte, že má-li f parciální derivace, pak platí tzv. Eulerův vztah

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf.$$

14. Nalezněte obecné řešení rovnice $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}) = f$.

15. Stanovte diferenciál funkcí

$$f(x, y, z) = xy^2z^5, \quad g(x, y, z) = \cosh(xy - z).$$

16. Pomocí Věty 5.16 ukažte, že

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}.$$

Nalezněte tečné roviny ke grafu funkce f v zadaném bodě

17. $f(x, y) = 2x^2 + y^2$, (1,1, ?);

18. $f(x, y) = x^4 + 2x^2y - xy + x$, (1, ?, 2);

19. $f(x, y) = xy$, (?, 2,2);

20. $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, (1,1,?).

21. Najděte rovnici tečné roviny k elipsoidu $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$, která je rovnoběžná s rovinou $4x + 2y + z = 0$.

22. Najděte tečnou rovinu k elipsoidu $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$, která vytíná stejné úseky na všech souřadnicových osách.

23. Nalezněte úhel, který v bodě (1,0,0) svírají grafy funkcí

$$f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{a} \quad g(x,y) = e^{xy} - 1.$$

24. Nalezněte vzdálenost roviny o rovnici $x + y + z = 5$ od koule se středem v počátku a poloměrem jedna.

25. Najděte délku úseku přímky o rovnici $x = -1, y = 4$ mezi grafem funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2$ a jeho tečnou rovinou v bodě $(0,2,2)$.

26. Potenciál v kovové struktuře je dán vztahem

$$V(x,y,z) = \frac{1}{0,02 + \sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

V jakých směrech roste v bodě $(1,-1,2)$ potenciál nejrychleji a nejpomaleji? Stanovte tečnu k dráze volné nabité částice procházející tímto bodem !

27. Hora má tvar grafu funkce

$$h(x,y) = 3000 - 2x^2 - y^2.$$

Předpokládejme, že horolezec je v bodě $(30,-20,800)$. V jakém směru se má pohybovat tak aby šel nejstrměji nahoru. V jakém směru se má pohybovat, aby si udržel stejnou nadmořskou výšku?

28. Nalezněte dráhu nabité částice pohybující se v rovině s rozložením potenciálu

$$V(x,y) = 50 - x^2 - 4y^2,$$

víme-li, že prochází bodem $(1,-2)$.

29. Teplota koule je dána vztahem

$$T(x,y,z) = e^{-x^2-2y^2-z^2}.$$

Teplomilná částice se pohybuje ve směru největšího teplotního spádu. Stanovte její dráhu, je-li v start v bodě $(1,1,1)$.

Odvoďte následující přibližné odhady

30. $(1+x)^m(1+y)^n \approx 1 + mx + ny, \quad x \approx 0,\ y \approx 0;$

31. $x^y \approx 2x + 2y - 5, \quad x \approx 1, y \approx 2;$

32. $\operatorname{arctg}(xy) \approx \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{x+y}{2}, \quad x \approx 1, y \approx 1.$

33. $\operatorname{arctg}(1 + xy) \approx x + y, \quad x \approx 0,\ y \approx 0;$

Pomocí aproximace diferenciálem odhadněte následující hodnoty

34. $\ln(\sqrt{0,96} + \sqrt[3]{1,02} + 2);$

35. $4,004 \cdot 2,002^2 \cdot 3,003^3.$

36. O kolik se přibližně změní úhlopříčka a plošný obsah obdélníku se stranami 12 m a 9 m, zvětší-li se první strana o 2 cm a druhá zmenší o 4 cm?

Výsledky

1. -6; 2. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ neexistuje, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$; 3. klesá; 4. zrychlení > 1; 8. Ukažte, že existuje K, že $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| \leq K\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$; 9. není; 10. není; 11. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$; 13. Vyjádřete $\partial_{(x,y)} f(x,y)$; 14. f je typu „lineární zobrazení + konstanta“;15. $\mathrm{d}f = y^2 z^5 \,\mathrm{d}x + 2xyz^5 \,\mathrm{d}y + 5xy^2 z^4 \,\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}g = y \sinh(xy - z) \,\mathrm{d}x + x \sinh(xy - z) \,\mathrm{d}y - \sinh(xy - z) \,\mathrm{d}z$ 17. $4x + 2y - z - 3 = 0$; 18. $5x + y - z - 3 = 0$; 19. $2x + y - z - 2 = 0$; 20. $2x - 2y + 4z - \pi = 0$; 21. $4x + 2y + z \pm \sqrt{19} = 0$; 22. $x + y + z \pm \sqrt{50} = 0$; 23. $\pi/3$; 24. $2/\sqrt{3}$; 25. 5; 26. $\pm(-1, 1, -2)$, $p(t) = t(-1, 1, -2) + (1, -1, 2)$; 27. $(-3, 1)$, $\pm(1, 3)$; 28. $y = -2x^4$; 29. Křivka $\varphi(t) = (1 - t, (1 - t)^2, 1 - t)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$; 36. -0.8 cm, -0.3 m^2.